Departamento de Matemáticas

# NOTAS DE CLASE
# CÁLCULO III

## Guias de Estudio

Doris Hinestroza

Universidad del Valle

# Índice general

# Capítulo 1

# FUNCIONES VECTORIALES

## 1.1. Resumen de la unidad

Hasta ahora hemos estudiado curvas como la gráfica de una función dada en forma explícita, $y = f(x)$ o $x = g(y)$, o como gráfica de un conjunto de puntos $(x, y)$ que satisfacen una ecuación $F(x, y) = 0$. Una ecuación como las anteriores, no es la única forma de describir una curva y a menudo no es la más conveniente. Por ejemplo si la curva describe la trayectoria de una partícula que se mueve en el plano o el espacio, el movimiento queda determinado por su posición en cada instante de tiempo. Esta descripción implica expresar las variables $x$, $y$, o $x$, $y$, $z$ como función de la variable $t$ o parámetro $t$. El estudio de cantidades vectoriales (como la fuerza, la velocidad , la aceleración etc.) datan desde la antigüedad, ya que en 1696 se plantearon problemas como el siguiente:

> Una partícula es obligada a deslizarse sin rozamiento a lo largo de cierta curva, que une un punto $A$ con un punto $B$ situado más abajo. Si la partícula desciende sometida únicamente a la acción de la gravedad, se pregunta cuál es la curva que debería elegirse para que el tiempo empleado sea mínimo.

Bernoulli dio solución a este problema y dicha curva coincidió con una curva llamada **braquistócrona. T**ambién se planteaban problemas físicos concretos cuya solución era una curva, como es el caso de la refracción de un rayo luminoso, el cuál dio origen al Principio General de Fermat de la óptica geométrica creando las bases para calcular los sistemas de lentes**.**

El moderno sistema de análisis vectorial fue creado de manera independiente (y casi simultáneamente) en la década de 1880 por el físico matemático Willard Gibbs y el ingeniero eléctrico Oliver Heaviside (1850-1925). Gibbs introdujo la notación $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ que ahora es estándar para los vectores tridimensionales. Gibbs fue el primero en definir con claridad el producto escalar $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}$ y el producto vectorial $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ de los vectores $\overrightarrow{a}$ y $\overrightarrow{b}$; estas operaciones son, no sólo útiles, sino fundamentales en el estudio de las curvas.
En particular podemos decir que las curvas aparecen como solución a problemas planteados en la mecánica óptica y en muchas aplicaciones de la ingeniería.

## 1.2. Contenido

1. Elementos básicos del Álgebra Lineal
2. Definición de funciones vectoriales
3. Operaciones algebraicas de funciones vectoriales
4. Límite, continuidad, derivada e integral de funciones vectoriales
5. Curvas y tangentes
6. Aplicaciones al movimiento curvilíneo
7. Vector tangente unitario, normal unitario, plano osculador de una curva
8. Longitud de una curva
9. Función longitud de arco
10. Curvatura de una curva
11. Ecuaciones de Frenet

## 1.3. Objetivos específicos

Al desarrollar completamente esta unidad usted debe estar en capacidad de

1. Dar ejemplos de funciones vectoriales.
2. Conocer y manejar los conceptos básicos asociados a funciones vectoriales: derivadas, vector velocidad, aceleración, integración, etc.
3. Dar la parametrización de una curva en su forma vectorial y paramétrica.
4. Calcular la deriva e integral de funciones vectoriales.

5. Calcular las derivadas de $\overrightarrow{\alpha(t)} \cdot \overrightarrow{\beta(t)}$, $\overrightarrow{\alpha(t)} \times \overrightarrow{\beta(t)}$, $\left\| \overrightarrow{\alpha(t)} \right\|^2$.

6. Entender y usar las relaciones entre la posición, la velocidad y la aceleración de un objeto moviéndose en una recta, en el plano o en el espacio.

7. Resolver problemas relacionados con el vector velocidad, la rapidez, el vector aceleración, momento angular, movimiento circular uniforme, movimiento a lo largo de una recta.

8. Determinar las propiedades de funciones vectoriales que tienen longitud constante.

9. Demostrar algunas conclusiones relacionadas con la fuerza, velocidad, aceleración, momento angular y torque.

10. Dar la ecuación vectorial de la recta tangente a una curva en un punto dado.

11. Calcular $\overrightarrow{T(t)}, \overrightarrow{N(t)}, \overrightarrow{v(t)}, v(t), \overrightarrow{a(t)}, a_T, a_N$ y $k(t)$.

12. Descomponer el vector aceleración en términos de los vectores $\overrightarrow{T(t)}$ y $\overrightarrow{N(t)}$.

13. Determinar la longitud de una curva entre dos puntos dados.

14. Conocer las propiedades de la longitud de arco.

15. Parametrizar una curva dada usando como parámetro la longitud de arco.

16. Determinar los puntos donde la curva tiene curvatura máxima o mínima.

17. Resolver problemas sobre movimiento de partículas.

## 1.4. Trabajo en clase

1. ¿Qué es una función vectorial? Dé ejemplos.

2. ¿Qué significa que una curva sea suave? ¿Cómo se halla el vector tangente unitario a una curva suave? (¿Bajó qué condiciones se define este vector?).

3. ¿Que propiedad geométrica tiene la derivada de una función vectorial?

4. ¿Cómo se halla la ecuación vectorial de la recta tangente a una curva en un punto dado?

5. Sea $\overrightarrow{r(t)} = (a\cos t, b\,\mathrm{sen}\, t, c)$ con $a$, $b$ y $c$ constantes¿Qué condiciones debe cumplir $a$, $b$ y $c$ para que $\overrightarrow{r(t)}$ sea perpendicular a $\overrightarrow{r'(t)}$?

6. ¿A qué es igual $\dfrac{d}{dt}\left\|\overrightarrow{r'(t)}\right\|^2$?

7. ¿Qué propiedad tienen las funciones vectoriales de longitud constante? Dé ejemplos.

8. ¿Cómo se halla la longitud de una curva? ¿Cómo se define la función de longitud de arco? ¿Qué propiedades tiene la función longitud de arco?

9. Escriba cómo se halla el vector normal unitario $\overrightarrow{N(t)}$ y el vector binormal. ¿Cómo se halla la ecuación del plano osculador en un punto sobre la curva?

10. ¿Qué propiedad física tiene una función vectorial dos veces diferenciable?

11. ¿Cómo se conoce la posición de una partícula si conocemos la aceleración y la velocidad? ¿Qué condiciones se deben conocer para calcular la posición de una partícula?

12. Escriba la aceleración en términos de sus componentes tangencial y normal. Dé ejemplos.

13. Si una curva en $\mathbb{R}^3$ tiene aceleración cero, podría decirse que la curva es una línea recta?

14. Investigue la importancia de los vectores $\overrightarrow{T(t)}$,$\overrightarrow{N(t)}$ y el vector binormal $\overrightarrow{B(t)}$.

15. ¿Cómo halla la curvatura a una curva? Dé ejemplos.

16. Durante un intervalo de tiempo $I = [0, 6]$ una partícula se mueve a lo largo de una curva dada por $x(t) = 3\cos\pi t$, $y(t) = 5\,\text{sen}\,\pi t$

    *a*) Escriba la posición en forma vectorial $\overrightarrow{r(t)}$.
    *b*) Encuentre la posición de la partícula cuando $t = 2{,}5$.
    *c*) Haga un bosquejo de la curva o trayectoria de la partícula desde $t = 0$ hasta $t = 6$. Indique la dirección de la partícula. ¿Cuántas veces la partícula pasa por el punto encontrado en la parte (b)?
    *d*) Halle el vector velocidad, la rapidez y el vector aceleración en cualquier tiempo $t$,

17. Una partícula se mueve a lo largo de la elipse $3x^2 + y^2 = 1$ con vector posición $\overrightarrow{r(t)} = (f(t), g(t)) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$. El movimiento es tal que la componente horizontal del vector velocidad en cada instante $t$ es $-g(t)$.

*a*) ¿Se mueve la partícula en sentido positivo o negativo respecto a la elipse?

*b*) Demuestre que la componente vertical del vector velocidad en el instante $t$ es proporcional a $f(t)$. Halle la constante de proporcionalidad. ¿Cuánto tiempo gasta la partícula en recorrer toda la elipse?

18. Una partícula se mueve sobre la parábola $y = 4x^2$ con vector posición $\overrightarrow{r(t)} = (f(t), g(t))$ iniciando el movimiento en el punto $(-2,\ 16)$. La partícula se mueve de tal forma que la componente horizontal del vector velocidad es igual a 3.

    *a*) Muestre que $f(t) = 3t - 2$ y $g(t) = 4\,(3t-2)^2$

    *b*) Halle $\overrightarrow{v(t)}$, $\overrightarrow{a(t)}$, $\overrightarrow{T\,(t)}$, $\overrightarrow{N\,(t)}$ en el punto $P(1,\ 4)$.. Dibuje la parábola y los vectores $\overrightarrow{T\,(t)}$, $\overrightarrow{a(t)}$ y $\overrightarrow{N\,(t)}$ en el punto $P$.Señale desde el punto $P$ los vectores $\overrightarrow{T}$ y $\overrightarrow{N}$, Si el vector $\overrightarrow{a}$ es dado por $\overrightarrow{a} = -2\overrightarrow{T} + 3\overrightarrow{N}$. Escoja otro punto cualquiera de la curva y señale los vectores $\overrightarrow{T}$ y $\overrightarrow{N}$, y el vector $\overrightarrow{a}$ dado por $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{T} + 3\overrightarrow{N}$.¿ Que propiedad tiene la componente normal de la aceleración?

19. Si $\overrightarrow{r(t)} = (2t+3, t^2-1)$, halle las componentes tangencial y normal de la aceleración sin hallar $\overrightarrow{T\,(t)}$ y $\overrightarrow{N\,(t)}$.

20. El vector binormal $\overrightarrow{B}$ es definido por $\overrightarrow{B(t)} = \overrightarrow{T\,(t)} \times \overrightarrow{N\,(t)}$. Los vectores $\overrightarrow{T\,(t)}$, $\overrightarrow{N\,(t)}$ y $\overrightarrow{B(t)}$ forman un sistema de mano derecha de vectores perpendiculares entre sí, que se van moviendo a lo largo de la trayectoria. Demuestre

    *a*) $\dfrac{\overrightarrow{dB}}{dt} \cdot \overrightarrow{B} = 0$ b. $\dfrac{\overrightarrow{dB}}{dt} \cdot \overrightarrow{T} = 0$ c. $\dfrac{\overrightarrow{dB}}{dt}$ es un múltiplo de $\overrightarrow{N(t)}$.

21. Halle la curvatura de la curva $y = \ln x$, en cualquier punto. ¿En qué punto es máxima la curvatura? ¿Porqué?

22. Si una partícula describe una curva en el espacio de tal manera que los vectores aceleración y velocidad tienen siempre magnitud constante, pruebe que la curvatura es constante en cada punto de la curva.

23. Las ecuaciones paramétricas de una curva son:

$$x = 2 + 4t, \quad y = 1 - 12t, \quad z = 3 + 3t$$

Halle la ecuación vectorial de la curva donde el parámetro sea la longitud de arco $s$ medida desde el punto $P(2,1,3)$. Calcule $\overrightarrow{T(s)}$.

24. Una partícula se mueve a lo largo de una curva plana con rapidez constante igual a 5. Sale del origen en el instante $t = 0$ con velocidad inicial $5\mathbf{j}$ y nunca pasa a la izquierda del eje $y$. En todo momento la curvatura es $k(t) = 2t$. Designemos con $\theta(t)$ el ángulo que forma el vector velocidad con el eje $x$ positivo en el instante $t$. Determine explícitamente $\theta(t)$ como función de $t$. Calcule el vector velocidad en función de $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$.

25. Una partícula se mueve a lo largo de una curva plana con velocidad constante igual a 2. El movimiento empieza en el origen en el instante $t = 0$ con velocidad inicial $2\mathbf{i}$. Se sabe que en cada instante la curvatura es $k(t) = 4t$. Halle el vector velocidad cuando $t = \frac{\sqrt{\pi}}{4}$ si la curva no está debajo del eje $x$.

26. Un objeto se mueve de izquierda a derecha a lo largo de la curva $y = x^{3/2}$ a velocidad constante. Si el punto está en $(0,0)$ al medio día y en $(1,1)$ a la una de la tarde, ¿dónde se encontrará a la una y media? Cuáles son las ecuaciones paramétricas del movimiento.

27. Parametrizar la circunferencia $x^2 + y^2 - 2ax = 0$, usando:

- Coordenadas polares.
- Usando como parámetro el ángulo comprendido ente el eje $x$ y el radio.

## 1.5. Problemas resueltos

1. Sea $\overrightarrow{r(t)} = (\operatorname{sen} t, \cos t, t)$

   *a*) Halle $\overrightarrow{v(t)}$, $\overrightarrow{a(t)}$, $\overrightarrow{T'(t)}$, $\overrightarrow{N(t)}$, y la rapidez $v(t)$.

   *b*) Halle la ecuación del plano osculador y de la recta tangente a la curva en el punto $(1, 0, \pi/2)$.

   **Solución.**

   a) Dado que $\overrightarrow{r(t)} = (\operatorname{sen} t, \cos t, t)$

   $\overrightarrow{v(t)} = \overrightarrow{r'(t)} = (\cos t, -\operatorname{sen} t, 1)$, $\quad \overrightarrow{a(t)} = (-\operatorname{sen} t, -\cos t, 0)$

   $v(t) = \sqrt{(\cos t)^2 + (-\operatorname{sen} t)^2 + 1} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

   $\overrightarrow{T(t)} = \dfrac{\overrightarrow{v(t)}}{v(t)} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\cos t, -\operatorname{sen} t, 1)$, $\overrightarrow{T'(t)} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(-\operatorname{sen} t, -\cos t, 0)$,

   $\left\|\overrightarrow{T'(t)}\right\| = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\quad \overrightarrow{N(t)} = \dfrac{\overrightarrow{T'(t)}}{\left\|\overrightarrow{T'(t)}\right\|} = (-\operatorname{sen} t, -\cos t, 0)$

b) El punto $(0,1,\pi/2)$ corresponde a un $\overrightarrow{r(t_0)}$ para algún $t_0$. Así

$$\overrightarrow{r(t_0)} = (\operatorname{sen} t_0, \cos t_0, t_0) = (1, 0, \pi/2)$$

entonces $\operatorname{sen} t_0 = 1, \cos t_0 = 0,\ t_0 = \pi/2$. El vector velocidad en $t_0$ es $\overrightarrow{v(\pi/2)} = (0,-1,1)$. Así la ecuación de la recta tangente es dada por $L(t) = \overrightarrow{r(\pi/2)} + t\overrightarrow{v(\pi/2)} = (1,0,\pi/2) + t(0,-1,1)$. Para hallar la ecuación del plano osculador en el punto $\overrightarrow{r(\pi/2)}$, hallamos el vector normal al plano dado por $B = \overrightarrow{T(\pi/2)} \times \overrightarrow{N(\pi/2)} = (0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) \times (-1,0,0) = (0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$. La ecuación general de un plano que pasa por un punto $(x_0, y_0, z_0)$ y con vector normal $(A,B,C)$ es dada por $A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0$. Así, la ecuación del plano osculador que pasa por el punto $(0,1,\pi/2)$ con vector normal $(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ es $0(x-0) - \frac{1}{\sqrt{2}}(y-1) - \frac{1}{\sqrt{2}}(z-\pi/2) = 0$, esto es, $y + z = 1 + \pi/2$ .

2. Sean $\overrightarrow{r(t)} \in \mathbb{R}^3$ una función vectorial dos veces diferenciable y $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^3$ un vector fijo con $\|\overrightarrow{v}\| = 4$ y tal que $\overrightarrow{r(t)} \times \overrightarrow{v} = 4t\mathbf{i}$ para todo $t$, donde $\mathbf{i} = (1,0,0)$. Si el vector $\overrightarrow{r'(t)}$ es perpendicular al vector $\overrightarrow{v}$, determine si los vectores $\overrightarrow{r'(t)}$ y $\overrightarrow{r''(t)}$ son perpendiculares.
**Solución**.
Derivando la ecuación $\overrightarrow{r(t)} \times \overrightarrow{v} = 4t\mathbf{i}$ tenemos $\overrightarrow{r'(t)} \times \overrightarrow{v} + \overrightarrow{r(t)} \times \overrightarrow{v'} = \overrightarrow{r'(t)} \times \overrightarrow{v} = 4\mathbf{i}$, ya que $v' = 0$ por ser un vector fijo (constante). Puesto que $\overrightarrow{r'(t)}$ es perpendicular al vector $\overrightarrow{v}$ el ángulo entre $\overrightarrow{r'(t)}$ y $\overrightarrow{v}$ es $\pi/2$ y calculando la norma de $\overrightarrow{r'(t)} \times \overrightarrow{v}$, tenemos $\left\|\overrightarrow{r'(t)} \times \overrightarrow{v}\right\| = \|4\mathbf{i}\| = 4$. Por lo tanto, $\left\|\overrightarrow{r'(t)} \times \overrightarrow{v}\right\| = \left\|\overrightarrow{r'(t)}\right\| \|\overrightarrow{v}\| \operatorname{sen}(\pi/2) = \left\|\overrightarrow{r'(t)}\right\| \|\overrightarrow{v}\| = \left\|\overrightarrow{r'(t)}\right\| 4 = 4$, entonces $\left\|\overrightarrow{r'(t)}\right\| = 1$. Dado que esta norma es constante entonces $\overrightarrow{r'(t)}$ es perpendicular con $\overrightarrow{r''(t)}$ .

3. El vector binormal $\overrightarrow{B}(t)$ está definido por $\overrightarrow{B}(t) = \overrightarrow{T(t)} \times \overrightarrow{N(t)}$

   *a*) Muestre que $\overrightarrow{B}(t)$ y $\dfrac{dB}{dt}$ son perpendiculares.

   *b*) Muestre que $\overrightarrow{T}(t)$ y $\dfrac{\overrightarrow{dB}}{dt}$ son perpendiculares.

   *c*) Muestre que $\dfrac{\overrightarrow{dB}}{dt}$ y $\overrightarrow{N(t)}$. son colineales.
   **Solución.**

$(a)$ Puesto que los vectores $\overrightarrow{T(t)}$ y $\overrightarrow{N(t)}$ son perpendiculares, el ángulo que ellos forman es de $\pi/2$, la norma del vector binormal está dada por

$$\left\|\overrightarrow{B}(t)\right\| = \left\|\overrightarrow{T(t)}\right\| \left\|\overrightarrow{N(t)}\right\| \text{ sen } (\pi/2) = 1{,}1{,}1 = 1.$$

Dado que la norma de $\overrightarrow{B}(t)$ es constante, entonces $\overrightarrow{B}$ y $\frac{\overrightarrow{dB}}{dt}$ son perpendiculares, es decir $\overrightarrow{B} \cdot \frac{\overrightarrow{dB}}{dt} = 0$

$(b)$ Derivando el vector $\overrightarrow{B}(t)$ tenemos

$$\frac{\overrightarrow{dB}}{dt} = \overrightarrow{T'(t)} \times \overrightarrow{N(t)} + \overrightarrow{T(t)} \times \overrightarrow{N'(t)}.$$

Puesto que $\overrightarrow{T'(t)}$ y $\overrightarrow{N(t)}$ son colineales, entonces su producto cruz es cero, es decir $\overrightarrow{T'(t)} \times \overrightarrow{N(t)} = \overrightarrow{0}$. Así

$$\frac{\overrightarrow{dB}}{dt} = \overrightarrow{T(t)} \times \overrightarrow{N'(t)}$$

y por definición del producto cruz tenemos que $\frac{\overrightarrow{dB}}{dt}$ y $\overrightarrow{T(t)}$ son perpendiculares es decir $\frac{\overrightarrow{dB}}{dt} \cdot \overrightarrow{T(t)} = 0$.

$(c)$ Puesto que $\overrightarrow{B}$ y $\frac{\overrightarrow{dB}}{dt}$ son perpendiculares, entonces $\frac{\overrightarrow{dB}}{dt}$ está en el plano generado por $\overrightarrow{T(t)}$ y $\overrightarrow{N(t)}$ (plano osculador). Por lo tanto $\frac{\overrightarrow{dB}}{dt}$ es combinación lineal de los vectores $\overrightarrow{T(t)}$ y $\overrightarrow{N(t)}$, es decir

$$\frac{\overrightarrow{dB}}{dt} = c_1\overrightarrow{T(t)} + c_2\overrightarrow{N(t)}.$$

Dado que $\frac{\overrightarrow{dB}}{dt}$ y $\overrightarrow{T(t)}$y son perpendiculares tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{\overrightarrow{dB}}{dt} \cdot \overrightarrow{T(t)} &= c_1\overrightarrow{T(t)} \cdot \overrightarrow{T(t)} + c_2\overrightarrow{N(t)}.\overrightarrow{T(t)} \\ 0 &= c_1 \end{aligned}$$

ya que $\overrightarrow{T(t)} \cdot \overrightarrow{T(t)} = \left\|\overrightarrow{T(t)}\right\|^2 = 1$ y $\overrightarrow{T(t)}$ y $\overrightarrow{N(t)}$ son perpendiculares. Por lo tanto

$$\frac{\overrightarrow{dB}}{dt} = c_2\overrightarrow{N(t)}.$$

Es decir $\dfrac{\overrightarrow{dB}}{dt}$ y $\overrightarrow{N(t)}$. son colineales.

4. a) Una partícula se mueve en el espacio de tal forma que en el instante $t = t_0$, el vector velocidad es $(1,1,1)$ y el vector aceleración es $(-2,1,0)$. Halle $a_T(t_0)$, $a_N(t_0)$.
   b) Si una partícula describe una curva en el espacio de tal manera que los vectores aceleración y velocidad tienen siempre magnitud constante, pruebe que la curvatura es constante en cada punto de la curva.
   **Solución**.

   *a)* $\overrightarrow{v(t_0)} = (1,1,1), v(t_0) = \left\|\overrightarrow{v(t_0)}\right\| = \sqrt{3}$, Puesto que $\overrightarrow{a(t_0)} = a_T\overrightarrow{T(t_0)} + a_N\overrightarrow{N(t_0)}$ y $\overrightarrow{v(t_0)} \cdot \overrightarrow{N(t_0)} = 0$ entonces $\overrightarrow{a(t_0)} \cdot \overrightarrow{v(t_0)} = a_T\overrightarrow{T(t_0)} \cdot \overrightarrow{v(t_0)}$ y dado que $\overrightarrow{v(t_0)} = v(t_0)\overrightarrow{T(t_0)}$ y $\overrightarrow{T(t_0)} \cdot \overrightarrow{T(t_0)} = \left\|\overrightarrow{T(t_0)}\right\| = 1$,tenemos $\overrightarrow{a(t_0)} \cdot \overrightarrow{v(t_0)} = a_T\overrightarrow{T(t_0)} \cdot \overrightarrow{v(t_0)} = a_T v(t_0)$ y si $v(t_0) \neq 0$, $a_T = \dfrac{\overrightarrow{a(t_0)} \cdot \overrightarrow{v(t_0)}}{v(t_0)} = \dfrac{(-2,1,0)\cdot(1,1,1)}{\sqrt{3}} = -1/\sqrt{2}$. También recordemos que $\left\|\overrightarrow{a(t_0)}\right\|^2 = a_T^2 + a_N^2 = 5$, entonces $a_N^2 = 5 - 1/2 = 9/2$. Puesto que $a_N \geq 0$, $a_N = 3/\sqrt{2}$.

   b) La curvatura está dada por $k(t) = \dfrac{\left\|\overrightarrow{a(t)} \times \overrightarrow{v(t)}\right\|}{v^3(t)}$. Supongamos que $\left\|\overrightarrow{v(t)}\right\| = c_1$ y $\left\|\overrightarrow{a(t)}\right\| = c_2$. Dado que $\left\|\overrightarrow{v(t)}\right\|$ es constante, entonces $\overrightarrow{v(t)} \perp \overrightarrow{a(t)}$. Así $k(t) = \dfrac{\left\|\overrightarrow{a(t)} \times \overrightarrow{v(t)}\right\|}{v^3(t)} = \dfrac{\left\|\overrightarrow{a(t)}\right\|\left\|\overrightarrow{v(t)}\right\|}{v^3(t)} = \dfrac{c_2}{c_1^2}$.

5. Dados dos vectores fijos no nulos $\overrightarrow{A}$ y $\overrightarrow{B}$ que forman un ángulo $\theta$, $0 < \theta < \pi$ y el movimiento de un vector con vector posición $\overrightarrow{r(t)}$, el cual satisface la ecuación
$$\overrightarrow{r'(t)} = \overrightarrow{A} \times \overrightarrow{r(t)}$$
   y la condición inicial $\overrightarrow{r(0)} = \overrightarrow{B}$.

   *a)* Muestre que $\overrightarrow{r''(t)}$ y $\overrightarrow{A}$ son ortogonales.

   *b)* Demuestre que la rapidez es constante y calcularla en términos de $\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}$ y $\theta$.

   *c)* Calcule la curvatura de la curva.
   **Solución**

(a) Derivando la ecuación dada tenemos que

$$\overrightarrow{r''(t)} = \overrightarrow{A'} \times \overrightarrow{r(t)} + \overrightarrow{A} \times \overrightarrow{r'(t)} = \overrightarrow{0} \times \overrightarrow{r(t)} + \overrightarrow{A} \times \overrightarrow{r'(t)} = \overrightarrow{A} \times \overrightarrow{r'(t)}$$

Por lo tanto

$$\overrightarrow{r''(t)} = \overrightarrow{A} \times \overrightarrow{r'(t)}$$

y esto implica que $\overrightarrow{r''(t)}$ es perpendicular a $\overrightarrow{A}$.

($b$) De la misma ecuación tenemos $\overrightarrow{r''(t)}$ es perpendicular a $\overrightarrow{r'(t)}$ y esto implica que $\left\|\overrightarrow{r'(t)}\right\|$ es constante así que la rapidez es $v(t) = v(0) = \left\|\overrightarrow{r'(0)}\right\| = \left\|\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{r(0)}\right\| = \left\|\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}\right\|$. Por lo tanto

$$v(t) = \left\|\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}\right\| = \left\|\overrightarrow{A}\right\| \left\|\overrightarrow{B}\right\| \operatorname{sen}\theta.$$

(c) $k = \dfrac{||\overrightarrow{r''} \times \overrightarrow{r'}||}{||\overrightarrow{r'}||^3} = \dfrac{||\overrightarrow{r''}||}{||\overrightarrow{r'}||^2}$ porque como se dijo en la parte (b), $\overrightarrow{r''(t)}$ es perpendicular a $\overrightarrow{r'(t)}$. Por la parte (a), $||\overrightarrow{r''}|| = ||\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{r'}|| = ||\overrightarrow{A}||||\overrightarrow{r'}|| \operatorname{sen}\theta$, de tal manera que

$$k = \frac{||\overrightarrow{r''}||}{||\overrightarrow{r'}||^2} = \frac{||\overrightarrow{A}||||\overrightarrow{r'}|| \operatorname{sen}\theta}{||\overrightarrow{r'}||^2} = \frac{||\overrightarrow{A}|| \operatorname{sen}\theta}{||\overrightarrow{r'}||} = \frac{||\overrightarrow{A}|| \operatorname{sen}\theta}{\left\|\overrightarrow{A}\right\| \left\|\overrightarrow{B}\right\| \operatorname{sen}\theta} = \frac{1}{||\overrightarrow{B}||}.$$

6. La aceleración de una partícula en función del tiempo viene dada por

$$\overrightarrow{a(t)} = (2t, 3t^2, 4t^3).$$

Si en el instante $t = 0$, la partícula está en el origen de coordenadas con velocidad inicial $\overrightarrow{v}(0) = \overrightarrow{i} - \overrightarrow{k}$,

   $a$) Halle la velocidad y la posición en cualquier instante de tiempo.

   $b$) Halle el valor de $t$ en el que partícula pasa por el plano $xy$.

   Solución. (a) Sea $\overrightarrow{r(t)}$ la posición de la partícula en el instante $t$. Por lo tanto $\dfrac{d\overrightarrow{r}}{dt} = \overrightarrow{v}(t)$ y $\dfrac{d^2r}{dt^2} = \dfrac{d\overrightarrow{v}}{dt} = \overrightarrow{a(t)} \Longrightarrow \int_0^t \overrightarrow{a(\tau)}d\tau = \int_0^t \dfrac{\overrightarrow{dv(\tau)}}{dt}d\tau = \int_0^t (2\tau, 3\tau^2, 4\tau^3)d\tau = \left(\tau^2, \tau^3, \tau^4\right)\Big|_0^t = \left(t^2, t^3, t^4\right) = \overrightarrow{v(t)} - \overrightarrow{v}(0) \Longrightarrow v(t) = \left(t^2, t^3, t^4\right) + \overrightarrow{v}(0) = \left(t^2, t^3, t^4\right) + (1, 0, -1) = (t^2 + 1, t^3, t^4 - 1)$. Entonces

$$v(t) = \left(t^2 + 1, t^3, t^4 - 1\right).$$

Ahora

$$\begin{aligned}\int_0^t \overrightarrow{v(\tau)}d\tau &= \int_0^t \frac{d\overrightarrow{r(\tau)}}{dt}d\tau = \int_0^t (\tau^2+1,\tau^3,\tau^4-1)d\tau \\ &= \left(\frac{\tau^3}{3}+\tau,\frac{\tau^4}{4},\frac{\tau^5}{5}-\tau\right)\Big|_0^t = \left(\frac{t^3}{3}+t,\frac{t^4}{4},\frac{t^5}{5}-t\right) \\ &= \overrightarrow{r(t)}-\overrightarrow{r(0)}=\overrightarrow{r(t)}.\end{aligned}$$

Entonces

$$\overrightarrow{r(t)} = \left(\frac{t^3}{3}+t,\frac{t^4}{4},\frac{t^5}{5}-t\right).$$

(b) El instante en el cual la partícula pasa por el plano $xy$ ocurre cuando la tercera componente de la posición es 0. O sea $\frac{t^5}{5}-t=0 \Longrightarrow t=0$ o $t=5$.

7. Una partícula se desplaza a lo largo de la rama superior de la hipérbola $y^2-x^2=9$, tal que la componente horizontal del vector velocidad es 3. Determine el vector velocidad y el vector tangente unitario en el instante $t=2$; la partícula está en el punto $(4,5)$.
**solución.**
Supongamos que el vector posición está dado por

$$\overrightarrow{r(t)} = (f(t),g(t)).$$

Para $t=2$ tenemos que $\overrightarrow{r(2)}=(4,5)$, lo cual implica que $f(2)=4$ y $g(2)=5$. Puesto que la partícula se mueve sobre la hipérbola entonces sus componentes satisfacen su ecuación y por lo tanto

$$g^2(t)-f^2(t)=9$$

Como el vector velocidad está dado por

$$\overrightarrow{v(t)} = (f'(t),g'(t))$$

y por las condiciones del problema sabemos que la componente horizontal de la velocidad es 3, entonces $f'(t)=3$ esto implica que $f(t)=3t+c$. Para hallar la constante $c$ tomamos $t=2$ y esto implica que $4=6+c$ y por lo tanto $c=-2$. Así $f(t)=3t-2$ y de acuerdo a la ecuación de la hipérbola tenemos que $g(t)=\sqrt{(3t-2)^2+9}$. Por lo tanto

$$\overrightarrow{r(t)} = \left(3t-2,\sqrt{(3t-2)^2+9}\right)$$

y su vector velocidad está dado por

$$\overrightarrow{v(t)} = \left(3, \frac{3(3t-2)}{\sqrt{(3t-2)^2+9}}\right)$$

El vector velocidad en $t = 2$ es $\overrightarrow{v\,(2)} = \left(3, \dfrac{3\cdot 4}{5}\right)$ y por lo tanto el vector tangente unitario está dado por

$$T(2) = \frac{\overrightarrow{v(2)}}{\left\|\overrightarrow{v(2)}\right\|} = \frac{\left(3, \dfrac{3\cdot 4}{5}\right)}{3\sqrt{41}} = \frac{(1, \frac{4}{5})}{\sqrt{41}}.$$

8. La trayectoria de una curva está dada por $\overrightarrow{r(t)} = (\cos t, 2\operatorname{sen} t)$, $0 \leq t \leq \pi$.

   *a*) Determine la curva parametrizada por $\overrightarrow{r}$, eliminando el parámetro $t$.

   *b*) Dibuje el vectores velocidad y aceleración en el punto $t = \pi/4$.

   *c*) Si una partícula que se encuentra en la curva determinada por $\overrightarrow{r}$ sale por la tangente en el punto $t = \pi/4$, ¿en qué punto atraviesa la partícula el eje $x$?

   **Solución.**

   (a) Las ecuaciones paramétricas están dadas por $x = \cos t$, $y = 2\operatorname{sen} t$. Por lo tanto $x = \cos t$, $\dfrac{y}{2} = \operatorname{sen} t$ y elevando al cuadrado tenemos que $x^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1$, que es la ecuación de una elipse. Puesto que $0 \leq \theta \leq \pi$, la trayectoria es la parte de la elipse en el semiplano superior orientada positivamente.

   (b) el vector velocidad y aceleración están dados por

   $$\overrightarrow{v(t)} = (-\operatorname{sen} t, 2\cos t) \quad \text{y} \quad \overrightarrow{a(t)} = (-\cos t, -2\operatorname{sen} t)$$

   y $\overrightarrow{v(\pi/4)} = (-\sqrt{2}/2, \sqrt{2})$ y $\overrightarrow{a(\pi/4)} = (-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2})$.

   (c) Dado el punto $\overrightarrow{r(\pi/4)} = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2})$ y el vector velocidad $\overrightarrow{v(\pi/4)} = (-\sqrt{2}/2, \sqrt{2})$ la ecuación de la recta tangente en dicho punto es

   $$\beta(t) = \overrightarrow{r(\pi/4)} + t\overrightarrow{v(\pi/4)} = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}) + t(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}) = \sqrt{2}/2(1-t, 2t+2).$$

   Claramente la partícula atraviesa el eje $x$ cuando la segunda componente es cero, es decir cuando $2t + 2 = 0$ o sea $t = -1$.

9. Considere la hélice $\overrightarrow{r(t)} = (4\cos t, 4\operatorname{sen} t, 3t)$ $t \geq 0$,

*a*) Determine la longitud de arco que va desde el punto $\overrightarrow{r(0)}$ hasta $\overrightarrow{r(\pi/2)}$.

*b*) Determine la función longitud de arco.

*c*) Reparametrice la curva usando el parámetro de longitud de arco $\overrightarrow{R(s)} = \overrightarrow{r(t(s))}$. Muestre que $\left\|\overrightarrow{R'(s)}\right\| = 1$

*d*) Halle las coordenadas del punto $Q$ sobre la hélice tal que la longitud de arco desde el punto $P(4,0,0)$ hasta $Q$ sea $5\pi$.

**Solución.**
(a) El vector velocidad está dado por $\overrightarrow{v(t)} = (-4\operatorname{sen} t, 4\cos t, 3)$ y la rapidez está dada por $v(t) = 5$. Por lo tanto la longitud está dado por

$$L = \int_0^{\pi/2} v(t)dt = \int_0^{\pi/2} 5dt = 5t|_0^{\pi/2} = \frac{5\pi}{2}.$$

(b) La función longitud de arco está dada por

$$s = \int_0^t v(\tau)d\tau = \int_0^t 5d\tau = 5t \Longrightarrow t = t(s) = \frac{s}{5}.$$

(c) Definiendo $\overrightarrow{R(s)} = \overrightarrow{r(t(s))} = \overrightarrow{r(\frac{s}{5})}$tenemos que

$$\overrightarrow{R(s)} = \left(4\cos\frac{s}{5}, 4\operatorname{sen}\frac{s}{5}, \frac{3s}{5}\right)$$

$\overrightarrow{R'(s)} = \left(-\frac{4}{5}\operatorname{sen}\frac{s}{5}, \frac{4}{5}\cos\frac{s}{5}, \frac{3}{5}\right)$ y $\left\|\overrightarrow{R'(s)}\right\| = 1.$

(d) Puesto que $t = \frac{s}{5}$ y $s = 5\pi$ implica que $t = \pi$. Así $Q = \overrightarrow{r(\pi)} = (-4, 0, 3\pi)$.

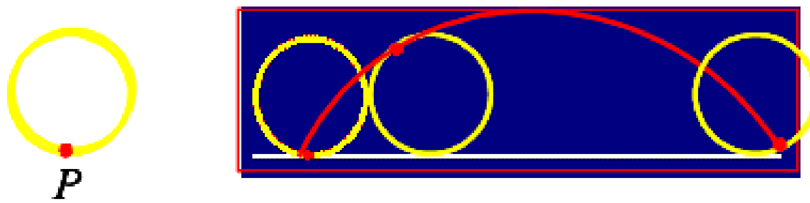
## 1.6. Problemas propuestos

### HERMOSAS CURVAS MATEMÁTICAS

Desde la época de Grecia, las curvas han sido objeto de estudio y han sido de gran interés hasta el día de hoy. Solución a problemas planteados en la mecánica óptica, electrodinámica y en muchas aplicaciones a la ingeniería conducen muchas veces a describir curvas distintas de las cónicas (elipses, hipérbolas o parábolas). En este guía estudiaremos algunas curvas históricamente interesantes e importantes.

### 1.6.1. La Cicloide

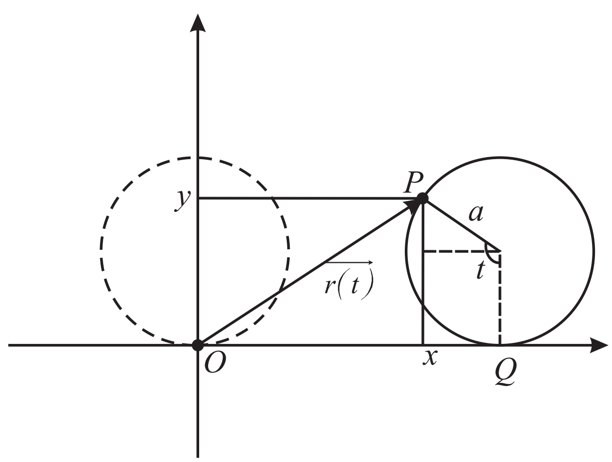
**La cicloide** es la curva que describe un punto de una circunferencia que rueda sobre una recta sin deslizar como se ve en la figura.




La cicloide fue llamada la **Helena de la geometría**, no solo por sus múltiples propiedades sino también por haber sido objeto de disputa entre muchos matemáticos. El primero que la estudio en profundidad fue Evangelista Torricelli(1608-1647) quien en 1644 publicó un tratado sobre la misma.
¿Con qué trayectoria debería oscilar un péndulo de tal manera que su período (tiempo que tarda en dar una oscilación) fuese siempre el mismo independientemente de la amplitud de la oscilación? Esta curva denominada **Tautócrona** fue descubierta por Christian Huygens(1629-1685) en 1673 y resulto ser también una cicloide.

## Actividad 1

Considere el sistema de coordenadas $x - y$ una circunferencia de radio $a$ la cual tiene marcado un punto $P$. La circunferencia rueda a lo largo del eje $x$ sin deslizarse.

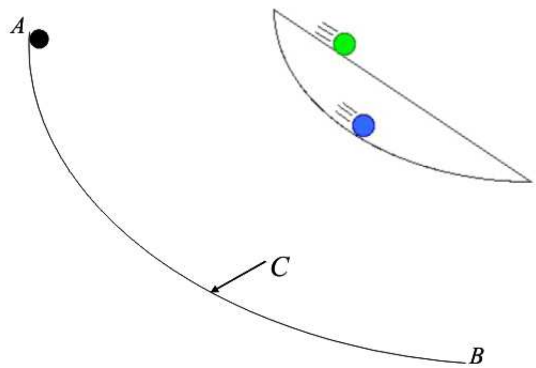


1. ¿Es la distancia del origen $O$ al punto $Q$ igual a la longitud de arco $\widehat{PQ}$? Señale la ubicación del punto $P$ para distintos valores de $t$ : $t = 0$, $\pi/4$, $\pi/2$, $\pi$, $3\pi/2$, $2\pi$. A partir de $2\pi$ se repite el movimiento del punto $P$?
2. Haga un bosquejo aproximado de la curva que describe el punto $P$.
3. ¿Cuál es la longitud del arco $\widehat{PQ}$? A que es igual $|OQ|$?
4. Calcule la componente $x$ en términos de $t$. Similarmente calcule la componente $y$ en términos de $t$.
5. Escriba la función paramétrica de la cicloide, $\overrightarrow{r(t)}$.
6. Calcule: $\overrightarrow{r'(t)}$. Es $\left\|\overrightarrow{r'(t)}\right\|$ constante?
7. ¿Son los vectores $\overrightarrow{r'(t)}$ y $\overrightarrow{r''(t)}$ perpendiculares?
8. Halle $\overrightarrow{T(t)}, a_T, a_N, \overrightarrow{N(t)}, \overrightarrow{r''(t)}$.
9. Exprese el vector $\overrightarrow{r''(t)}$ en términos de los vectores $\overrightarrow{T(t)}$ y $\overrightarrow{N(t)}$.
10. Halle la longitud de la cicloide.
11. En las ecuaciones paramétricas de la cicloide halladas por usted en el punto 5, determine si es posible eliminar el parámetro $t$ para encontrar su representación cartesiana $y = \phi(x)$.
12. Muestre que la función $\phi$ satisface la ecuación diferencial $\left(1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right) y = 2a$. Puesto que usted ha calculado $\dfrac{dx}{dt}$ y $\dfrac{dy}{dt}$, exprese $\dfrac{dy}{dx}$ en términos de $t$ y a partir de ese resultado pruebe que $\phi$ satisface la ecuación diferencial $(1 + y'^2)y = 2a$.

### 1.6.2. La Braquistócrona

Uno de los problemas más famosos de la historia de las matemáticas es el de la braquistócrona. En 1696 se planteaba el siguiente problema que tiene que ver con el tema de funciones vectoriales:

> El problema es el siguiente: Encontrar una curva a lo largo de la cual una partícula puede deslizarse sin fricción en un tiempo mínimo desde un punto $A$ hasta un punto $B$ situado más abajo. Si se permite que la partícula descienda exclusivamente bajo la acción de la gravedad, se pregunta cuál es la curva que debe elegirse para que el tiempo empleado en el descenso desde $A$ hasta $B$ sea mínimo.




Esta curva de descenso rápido se llama Braquistócrona (palabra del griego braquistos=el más breve y cronos=tiempo).
Galileo considero que la línea recta que une dos puntos $A$ y $B$ es la curva de descenso rápido. Fue Johan Bernoulli en 1696, quien dio solución a este problema mostrando que la
**braquistócrona** resulta ser el arco de otra curva llamada **cicloide** invertida que pasa por $A$ y tiene su punto mas bajo en $B$. Ya en 1673 Huygens descubrió un hecho realmente sorprendente de la trayectoria **cicloide**: Si un punto cae, en caída libre, siguiendo una cicloide desde un punto a su punto mas bajo, el tiempo de caída no depende del punto en que se inició el movimiento (**Curva Tautócrona** ). Es interesante conocer que este problema se planteó como una prueba matemática de un singular concurso convocado en junio de 1696 por Johann Bernoulli y dirigido como reto abierto a las mentes más brillantes. Los participantes tenían 6 meses para resolverlo aunque a solicitud de GW Leibnitz, la fecha fue prorrogada hasta la pascua de 1697. Bernoulli predijo correctamente la identidad de los cinco matemáticos que darían una demostración, a saber: él mismo y su hermano Jacob, Leibnitz, Newton y L´Hopital. Newton ya retirado de la vida académica lo recibió el 29 de enero de 1697 y comunicó su solución al día siguiente a la Sociedad Real de Londres. En el otro extremo el más lento de todos, L´Hopital, requirió ayuda de parte de Johann Bernoulli, mientras que la solución de Jacob Bernoulli es considerada el problema inaugural de una nueva disciplina matemática conocida como ”Cálculo de Variaciones”.

### 1.6.3. Curvas de Bézier

Pierre Bézier fue un ingeniero de Renault que durante los años 60 realizo un estudio con el objetivo de mejorar el diseño de las componentes de los automóviles. Paralelamente, otro ingeniero perteneciente a la empresa Citroen llamado Paul de Faget de Casteljau, estaba trabajando sobre el mismo campo. De este último no se llegó a publicar nada en principio, con lo cual Bézier fue

el que se llevó los honores y el que da nombre a este tipo de curvas. Una curva Bézier queda totalmente definida por cuatro puntos característicos, los puntos inicial y final de la curva y dos puntos de control (manejadores) que definen su forma. Para modificar su forma, basta cambiar de posición uno de sus puntos de control.
Son curvas de manejo poco complejo y muy elegantes, con un desarrollo muy suave, capaces de adaptarse a casi cualquier forma imaginable, por lo que son muy usadas para diseñar logotipos e iconos y para copiar cualquier figura.
También son enormemente versátiles, pudiendo adoptar desde curvaturas muy suaves (casi líneas rectas) a curvaturas muy fuerte (curvas complejas), pasando por todos los valores intermedios. Pueden, incluso, cambiar de cóncavas a convexas alrededor de un punto.

Una curva de Bézier une cuatro puntos no alineados en el plano, $P_0 = (x_0, y_0)$, $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$ y $P_3 = (x_3, y_3)$, y se describe como sigue: para cada $t \in [0, 1]$: el punto $P_4(t)$ es el punto del segmento $P_0P_1$ que verifica $P_4(t) = P_0 + t(P_1 - P_0)$, el punto $P_5(t)$ es el punto del segmento $P_1P_2$ que verifica $P_5(t) = P_1 + t(P_2 - P_1)$, el punto $P_6(t)$ es el punto del segmento $P_2P_3$ que verifica $P_6(t) = P_2 + t(P_3 - P_2)$, el punto $P_7(t)$ es el punto del segmento $P_4(t)P_5(t)$ que verifica $P_7(t) = P_4(t) + t(P_5(t) - P_4(t))$, el punto $P_8(t)$ es el punto del segmento $P_5(t)P_6(t)$ que verifica $P_8(t) = P_5(t) + t(P_6(t) - P_5(t))$ y el punto $\gamma(t)$ es el punto del segmento $P_7(t)P_8(t)$ que verifica $\gamma(t) = P_7(t) + t(P_8(t) - P_7(t))$.

## Actividad 2

1. Ubique 4 puntos no alineados en el plano y describa los pasos para definir la curva de Bézier. De qué forma sería esta curva de acuerdos a los puntos que usted dio?

2. Demuestre que

$$C(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^3 \\ t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix}$$

3. Probar que el segmento $P_0P_1$ es tangente al punto $\gamma(0) = P_0$ y el segmento $P_2P_3$ es tangente al punto $\gamma(1) = P_3$.

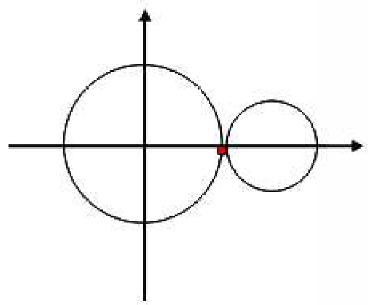
4. Determinar la curva de Bézier para los puntos $P_0 = (0, 0)$, $P_1 = (1, 2)$, $P_2 = (2, 3)$ y $P_3 = (3, 0)$.

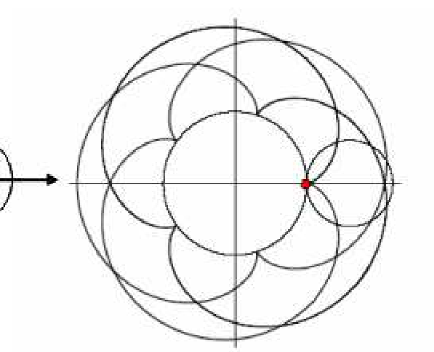
5. Trace tres puntos que pueden estar alineados: Describir la curva de Bézier para los puntos $P_0 = (0, 0)$, $P_1 = (1, 1)$, $P_2 = (2, 2)$ y $P_3 = (3, 0)$. Escriba la curva en la forma $y = f(x)$ y dibújela..

6. Investigue sobre las aplicaciones de las curvas Bézier.

### 1.6.4. La Epicicloide

Cuando una circunferencia rueda sin deslizarse por el exterior de otra circunferencia (por ejemplo cuando giramos una moneda sobre otra), cada punto $P$ de la primera circunferencia describe una curva llamada **epicicloide**. Supóngase que la curva fija tiene radio $a$ y su centro está en el origen de coordenadas. Supóngase también que la circunferencia móvil tiene radio $b$ y que la posición inicial del punto $P$ es $(a, 0)$.





## Actividad 3

1. Demuestre que las ecuaciones paramétricas de la epicicloide están dadas por

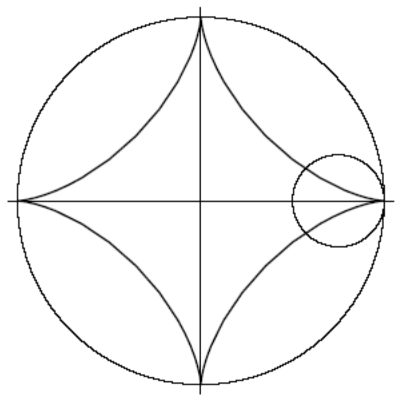
$$\begin{aligned} x(\theta) &= (a+b)\cos\theta - b\cos(\frac{a+b}{b}\theta) \\ y(\theta) &= (a+b)\operatorname{sen}\theta - b\operatorname{sen}(\frac{a+b}{b}\theta) \end{aligned}$$

   donde $\theta$ es el ángulo que forma el eje $x$ y la línea que une los centros de ambas circunferencias.
   Ayuda. Halle primero dónde se encuentra el centro de la circunferencia móvil. ¿Qué representa $\frac{a+b}{b}\theta$?

2. Investigue la importancia en su campo de la curva epicicloide.

### 1.6.5. La Hipocicloide

Cuando una circunferencia rueda sin deslizarse al interior de otra circunferencia fija, cada punto $P$ de la primera circunferencia describe una curva llamada **hipocicloide**. Supóngase que la curva fija tiene radio $a$ y su centro está en el origen de coordenadas. Supóngase también que la circunferencia móvil tiene radio $b$ ($b < a$) y que la posición inicial del punto $P$ es ($a$,0).



## Actividad 4

1. Demuestre que las ecuaciones paramétricas de la hipocicloide están dadas por

$$\begin{aligned} x(\theta) &= (a-b)\cos\theta - b\cos(\frac{b-a}{b}\theta) \\ y(\theta) &= (a+b)\operatorname{sen}\theta - b\operatorname{sen}(\frac{b-a}{b}\theta) \end{aligned}$$

   donde $\theta$ es el ángulo que forma el eje $x$ y la línea que une los centros de ambas circunferencias.
   Ayuda. Halle primero dónde se encuentra el centro de la circunferencia móvil. ¿Qué representa $\frac{b-a}{b}\theta$?

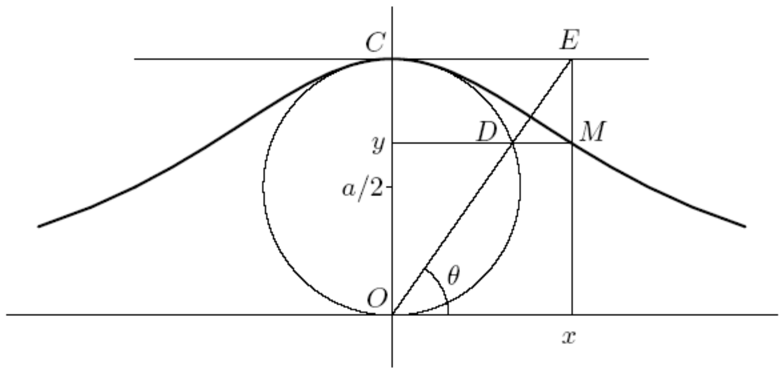
2. Investigue la importancia en su campo de la curva hipocicloide.

### 1.6.6. Curva de Agnesi

Considere la circunferencia

$$x^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4}$$

centrada en el punto$(0, a/2)$ y de radio $a/2$ y la recta tangente a la misma por el punto $C(0, a)$. Desde el origen $O$ se traza una recta cuyos puntos de corte con la circunferencia y la recta tangente se denotan por $D$ y $E$ respectivamente. Por el punto $D$ se traza una paralela al eje $x$ y por el punto $E$ se traza una paralela al eje $y$; estas dos rectas se cortan en un punto $M$. Al girar la recta $OE$ alrededor del punto $O$, el punto $M$ describe una curva que se denomina **curva de Agnesi**.




### Actividad 5

Elija como parámetro el ángulo que forma el segmento $OE$ con la eje $x$ (obsérvese que esto no nos da una representación polar, ya que el punto $M$ no está sobre dicho segmento). Muestre que las ecuaciones paramétricas de la curva de Agnesi están dadas por

$$\begin{aligned} x(\theta) &= a\cot\theta \\ y(\theta) &= \frac{a}{1+\cot^2\theta} = a\,\mathrm{sen}^2\,\theta \end{aligned}$$

## 1.7. Exámenes cortos

### QUIZ 1

1. Sea $\overrightarrow{r(t)} = (\cos t, \,\mathrm{sen}\, t, t)$

   a) Halle $\overrightarrow{v(t)}$, $\overrightarrow{a(t)}$, $\overrightarrow{T(t)}$, $\overrightarrow{N(t)}$, y la rapidez $v(t)$

   b) Halle la ecuación del plano osculador y de la recta tangente a la curva en el punto $(0, 1, \pi/2)$.

2. Sean $\overrightarrow{\alpha(t)} \in \mathbb{R}^3$ una función vectorial dos veces diferenciable y $\overrightarrow{C} \in \mathbb{R}^3$ un vector fijo con $\left\|\overrightarrow{C}\right\| = 9$ y tal que $\overrightarrow{\alpha(t)} \times \overrightarrow{C} = 9t\mathbf{k}$ para todo $t$, donde $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$. Si el vector $\overrightarrow{\alpha'(t)}$ es perpendicular al vector $\overrightarrow{C}$, determine si los vectores $\overrightarrow{\alpha'(t)}$ y $\overrightarrow{\alpha''(t)}$ son perpendiculares.

**QUIZ 2**

1. El vector normal $\overrightarrow{B}$ es definido por $\overrightarrow{B(t)} = \overrightarrow{T(t)} \times \overrightarrow{N(t)}$

   *a*) Muestre que $B$ y $\dfrac{dB}{dt}$ son perpendiculares.

   *b*) Muestre que $\overrightarrow{T}$ y $\overrightarrow{\dfrac{dB}{dt}}$ son perpendiculares.

   *c*) Muestre que $\overrightarrow{\dfrac{dB}{dt}}$ y $\overrightarrow{N(t)}$ son colineales.

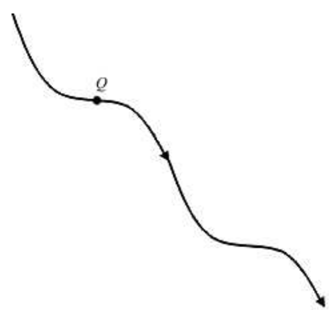
2. Sea $\overrightarrow{r(t)} = (\operatorname{sen} t, t, \cos t)$

   *a*) Halle la ecuación del plano osculador a la curva en el punto $(0, 2\pi, 1)$

   *b*) Halle la longitud de la curva desde el punto $(0, 0, 1)$ hasta el punto $(0, 2\pi, 1)$.

   *c*) Halle la reparametrización de $\overrightarrow{r}$ con respecto a la longitud de arco.

3. Señale desde el punto $Q$ los vectores $\overrightarrow{T}$ y $\overrightarrow{N}$, si el vector $\overrightarrow{a}$ es dado por $\overrightarrow{a} = -2\overrightarrow{T} + 3\overrightarrow{N}$.




**QUIZ 3**

1. Determine porqué el vector aceleración se puede escribir como $\overrightarrow{a(t)} = v'(t)\overrightarrow{T(t)} + a_N\overrightarrow{N(t)}$. Dé un ejemplo de un movimiento sobre una curva que usted describa, señalando los vectores $\overrightarrow{T(t)}$,$\overrightarrow{N(t)}$, $\overrightarrow{B(t)}$ y $\overrightarrow{a(t)}$ en un punto particular de la curva.

2. Una partícula se mueve en el espacio de tal forma que en el instante $t = t_0$, el vector velocidad es $(2, -1, 1)$ y el vector aceleración es $(3, 2, 1)$. Halle $a_T(t_0)$, $a_N(t_0)$.

3. Si una partícula describe una curva en el espacio de tal manera que los vectores aceleración y velocidad tienen siempre magnitud constante, pruebe que la curvatura es constante en cada punto de la curva.

4. Una partícula inicia su movimiento en el punto $Q(1, 1)$ de la parábola $y = x^2$, de tal forma que la componente horizontal del vector velocidad es igual a $-1$. Determine cómo es el movimiento de la partícula. Halle $\overrightarrow{r(t)}$, $\overrightarrow{v(t)}$, $\overrightarrow{a(t)}$, $\overrightarrow{T\,(t)}$, $\overrightarrow{N\,(t)}$, $a_T, a_N$, y $k(t)$ en el punto $P(-1, 1)$.

5. Considere la función vectorial $\overrightarrow{r(t)} = (1 - t, 3 + 2t, 4 + 3t)$ que determina una curva en el espacio. Halle la función longitud de arco y reparametrice la curva usando la longitud de arco. Calcule $\overrightarrow{T(s)}$. Determine si el movimiento es lineal.

# Capítulo 2

# CAMPOS VECTORIALES Y ESCALARES

## 2.1. Resumen de la unidad

Esta unidad está dedicada a la solución y al planteamiento de problemas relacionados con campos vectoriales y campos escalares (funciones de varias variables). En el mundo real, son muchos los problemas que pueden modelarse con campos vectoriales o escalares. Por ejemplo

- El volumen $V$ de un cilindro circular depende de su radio y su altura. $V = 2\pi rh$
- La ley de los gases ideales $PV = nRT$ (donde $n$ y $R$ son constantes) se utiliza para expresar cualquiera de las variables $P$ (presión) y $T$ (temperatura), en función de las otras dos.
- La utilidad de un fabricante depende de las ventas, los costos, la cantidad de materia prima utilizada, gastos generales y de algunas otras variables.
- La cantidad de energía útil que puede reunir una celda solar depende de su eficiencia, su ángulo de inclinación con respecto a los rayos del sol, el ángulo de elevación del sol sobre el horizonte y de otros factores.

los conceptos tales como límites, continuidad, diferenciabilidad, máximos, mínimos, integrales, etc. se extienden también a las funciones de varias variables. Joseph Louis Lagrange, por ejemplo es recordado por sus grandes tratados acerca de la mecánica analítica y de la teoría de funciones, que resumían gran parte de las matemáticas puras y aplicada del siglo $XVIII$. estos tratados,

Mecánique analytique (1788), Theorie des functions analyques (1797) y Leçons sur le calculus des functions (1806), desarrollados de manera sistemática y aplicados de forma amplia al cálculo diferencial e integral de las funciones de varias variables expresadas en términos de las coordenadas rectangulares $x, y, z$ del espacio tridimensional, fueron escritos y publicados en París durante los últimos 25 años de Lagrange.
Lagrange consideraba su obra acerca de los problemas de máximos y mínimos como su mejor trabajo en matemáticas. En su libro Mecánique analytique, Lagrange aplicó el "método de la Lagrange" para investigar el movimiento de una partícula en el espacio, restringida a moverse sobre una superficie de la forma $g(x, y, z) = 0$. En esta unidad se aplica el método de Lagrange al problema de maximizar o minimizar una función $f(x, y, z)$ sujeta a una o dos restricciones de la forma $g(x, y, z) = 0$. En la actualidad, este método tiene aplicaciones que varían para minimizar la cantidad de combustible que necesita una nave espacial para lograr una trayectoria deseada, hasta maximizar la productividad de una empresa comercial limitada por la disponibilidad de los recursos financieros, naturales o de personal.

### 2.1.1. Contenido

1. Determinar el dominio de una función de dos variables y describir las curvas de nivel y su gráfica.
2. Determinar el dominio de una función de tres variables y describir sus superficies de nivel.
3. límites y continuidad de campos vectoriales y escalares
4. Conjuntos de Nivel. Curvas de nivel. Superficies de nivel
5. Derivada en una dirección. Derivada direccional. Derivadas parciales.
6. Diferenciabilidad, gradiente
7. Fórmula de la derivada direccional de una función diferenciable
8. Regla de la Cadena. Diferencial Total.
9. Plano tangente y recta normal a una superficie en un punto
10. Máximos y mínimos de funciones $z = f(x, y)$
11. Extremos condicionados. Multiplicadores de Lagrange.
12. Máximos y mínimos de una función $z = f(x, y)$ en una región cerrada y acotada del plano.

### 2.1.2. Objetivos Específicos de la Unidad

Al desarrollar completamente esta unidad usted debe estar en capacidad de

1. Identificar y graficar conjuntos de nivel, como curvas y superficies de nivel.
2. Identificar y bosquejar los cilindros y las superficies cuádricas y superficies de revolución como superficies de nivel de funciones de tres variables.
3. dibujar las curvas de nivel de una función $z = f(x, y)$, para diferentes valores de la constante $c$.
4. dada las curvas de nivel $z = f(x, y)$ para diferentes valores de la constante $c$
5. Hallar la ecuación de la recta normal y del plano tangente a una superficie en un punto dado.
6. Hallar la ecuación del plano tangente a la curva de la intersección de dos superficies dadas.
7. Verificar que una función dada $z = f(x, y)$ satisface determinada ecuación diferencial parcial.
8. Hallar la dirección que máximiza o minimiza la derivada direccional y calcular dicho valor máximo o mínimo.
9. Dado en un punto $\overrightarrow{a}$ el gradiente de la función, $\nabla f(\overrightarrow{a})$ hallar la derivada en el punto $\overrightarrow{a}$ en una determinada dirección $\overrightarrow{y}$.
10. Aplicar correctamente la regla de la cadena.
11. Entender las propiedades de los campos vectoriales a través de sus componentes que son campos escalares.
12. Saber calcular el rotacional y la divergencia de un campo vectorial.
13. Saber la interpretación física del rotacional y de la divergencia de un campo vectorial.
14. Analizar el límite de una función de dos o más variables
15. Analizar la continuidad de una función de dos o más variables.
16. Usar curvas para demostrar que un límite dado no existe para una función de varias variables.
17. Calcular las derivadas parciales de una función de varias variables.

18. Calcular las derivadas parciales de orden superior de funciones de dos o tres de varias variables.

19. Leer y entender las distintas notaciones para las derivadas parciales.

20. Dar una interpretación apropiada (razón de cambio) de las derivadas parciales de una función de varias variables.

21. Determina la ecuación del plano de la tangente para una función dada en un punto dado.

22. Determina la aproximación linear para una función dada.

23. Usar los diferenciales para aproximar valores de funciones.

24. Usar apropiadamente la regla de cadena la composición dada de funciones.

25. Calcular las derivadas parciales de funciones dadas implícitamente.

26. Saber interpretar geométricamente el vector del gradiente.

27. Saber calcular el vector gradiente de una función diferenciable.

28. Calcular la derivada direccional dado una función en un punto y en una dirección dada.

29. Clasificar (como mínimo local, máximo local, punto silla o ni uno ni otro) todos los puntos críticos para una función dada en un dominio dado usando el criterio de las derivadas de orden dos para funciones de dos variables.

30. Hallar el mínimo global y el máximo global para una función dada en un dominio dado cerrado y acotado.

31. Usar el Método de Lagrange para resolver problemas de optimización restringida.

## 2.2. Trabajo en clase

1. ¿Qué es una función de varias variables?

2. ¿Qué significa que $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$?

3. ¿Cómo se puede demostrar que dicho límite no existe? Dé un ejemplo. ¿Qué significa que $f$ sea continua en $(a,b)$?

4. ¿Se podría definir adecuadamente $f(0,0)$ para que la función $f(x,y) = \frac{x^2}{x^2+y^2}$, $(x,y) \neq (0,0)$ sea continua en $(0,0)$?

5. ¿Cómo se define la gráfica de una función de varias variables?

6. ¿Qué son curvas de nivel de $z = f(x,y)$?

   ¿Qué son las superficies de nivel de $w = g(x,y,z)$?

   ¿Qué propiedad tiene el $\nabla f$, $\nabla g$ sobre las curvas de nivel y superficies de nivel respectivamente?

7. Considere las funciones $f(x,y) = y^2(1-x)^{1/2} + x\,\mathrm{sen}\,(xy)$ y $u(x,y) = xy/(x+y)$. Calcule las derivadas parciales de $f$.

8. Intente hacer un gráfico de las curvas de nivel de las funciones dadas abajo. Si no puede, utilice un programa de cálculo simbólico (MuPad, Mathematica, Derive etc) para hacer la gráfica y justifique el resultado mostrado en el computador. Haga también un gráfico de dichas superficies.

   *a*) $f(x,y) = 2x^2 + 3y^2$
   *b*) $f(x,y) = \mathrm{sen}\sqrt{x^2+y^2}$
   *c*) $f(x,y) = 2x + 3y^2$
   *d*) $f(x,y) = e^{y-x^2}$
   *e*) $f(x,y) = -y^2$
   *f*) $f(x,y) = x - y$

9. Dibuje algunas superficies de nivel de las funciones dadas. Si no puede, utilice un programa de cálculo simbólico (MuPad, Mathematica, Derive etc) para hacer la gráfica y justifique el resultado mostrado en el computador.

   *a*) $f(x,y,z) = x^2 - y^2 + z^2$
   *b*) $f(x,y,z) = 2x^2 + 3y^2 + 4z^2$
   *c*) $f(x,y,z) = x + y - z$
   *d*) $f(x,y,z) = x^2 + z^2$
   *e*) $f(x,y,z) = z$
   *f*) $f(x,y,z) = 1 + y^2$

10. Una función $f(x,y)$ se llama homogénea de grado $n$ si , para $n$ fijo,

$$f(tx,ty) = t^n f(x,y).$$

*a*) Muestre que la función $f(x, y) = x^3 + y^3$ es homogénea de grado $n = 3$.

*b*) Muestre que una función diferenciable homogénea de grado $n$ satisface la ecuación
$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = nf(x, y)$$

*c*) calcule $f_{xx}, f_{yx}, f_{xy}$ y verifique que $f_{yx} = f_{xy}$.

*d*) Pruebe que $x^2 u_{xx} + 2xyu_{xy} + y^2 u_{yy} = 0$.

11. Sea $z = yf(\frac{x}{y})$. Halle $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}$. Muestre que $z$ satisface la ecuación $\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{x}{y}\dfrac{\partial z}{\partial y} = xyz$.

12. ¿Qué significa que una función de varias variables sea diferenciable?

13. ¿Cómo se halla el plano tangente a la gráfica de una función $z = f(x, y)$?

    ¿Cómo se halla el plano tangente una superficie de nivel de $g(x, y, z) = k$.

    ¿Cómo se halla el plano tangente una superficie paramétrica por la función $\overrightarrow{r}(u,\ v)$? Dé ejemplos.
    Si la curva de intersección de dos superficies $f(x, y, z) = 0$ y $g(x, y, z) = 0$ pasan por el punto $(a, b, c)$,¿como hallaría un vector tangente a la curva en $(a, b, c)$?

14. ¿Qué es un campo vectorial? Dé tres ejemplos que tengan un significado físico.

    *a*) ¿Qué es un campo vectorial conservativo?

    *b*) ¿Qué es una función potencial?

    *c*) ¿Qué significa la ley de la conservación de la energía?

15. Haga un bosquejo del campo vectorial $\overrightarrow{F(x, y)} = (0, -x)$ sobre $\mathbb{R}^2$. Calcule la divergencia y rotacional de dicho campo.

16. Calcule el rotacional del campo vectorial $\overrightarrow{F}$ definido por
$$\overrightarrow{F(x, y)} = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}\right), \quad (x, y) \neq (0, 0).$$

17. Sea $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ y $f(r)$ una función de $r$ dos veces continuamente diferenciable.

    *a*) Muestre que $\nabla f(r) = \frac{f'(r)}{r}\overrightarrow{r}$ donde $\overrightarrow{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

b) Muestre que el Laplaciano de $f$ es $\Delta f(r) = \operatorname{div}(\nabla f(r)) = f''(r) + \frac{2}{r} f'(r)$.

18. Muestre que el campo $\overrightarrow{F(x,y)} = (2x+y)\mathbf{i}+(2y+x)\mathbf{j}$ es un campo gradiente de un campo escalar $\varphi$ tal que $\overrightarrow{F} = -\nabla\varphi$. Halle $\varphi$.

19. Considere el campo vectorial $\overrightarrow{F(x,y,z)} = (x^2, xyz, xy)$

    a) Calcule la divergencia y el rotacional del campo.

    b) Si $\overrightarrow{G(x,y,z)} = (x, -y-x^2, 2-2z/y)$ y $f(x,y,z) = \overrightarrow{G(x,y,z)} \cdot (\nabla \times \overrightarrow{F(x,y,z)})$, muestre que el Laplaciano de $f$ es cero, $\Delta f = 0$.

20. Sea $f$ es un campo con derivadas parciales de orden dos continuas. Muestre que $\nabla \times (\nabla f) = 0$ y $\operatorname{div}(\operatorname{rot}(\nabla f)) = 0$.

21. Sean $f$ un campo escalar y $\overrightarrow{F}$ un campo vectorial diferenciables. Muestre que

    a) $\nabla \cdot (f\overrightarrow{F}) = (\nabla f) \cdot \overrightarrow{F} + f\nabla \cdot \overrightarrow{F}$

    b) $\nabla \times (f\overrightarrow{F}) = (\nabla f) \times \overrightarrow{F} + f\nabla \times \overrightarrow{F}$.

22. Hallar el campo eléctrico $E = -\nabla\varphi$ para cada una de las siguientes funciones potenciales en el punto dado.

    a) $\varphi = 2z^3 - 3(x^2+y^2)z, \quad (1,1,1)$

    b) $\varphi = e^x + y\cos xz, \quad (0,0,\pi/3)$.

23. ¿A qué distancia está el punto $(2,1,3)$ del plano tangente a la gráfica de la gráfica de $z = xy$ en $(3,4,12)$?

24. Dos superficies $z = x^2y^3$, $z = 2xy$ pasan por el punto $(2,1,4)$. ¿En qué ángulo se cruzan en tal punto?

25. Si $f$ es diferenciable escriba $f'(\overrightarrow{a};\ \overrightarrow{y})$ en términos del gradiente en $\overrightarrow{a}$ y del vector $\overrightarrow{y}$.

26. Si $\overrightarrow{u}$ es un vector tangente en un punto $\overrightarrow{a}$ de una curva de nivel de una función $f$ ¿es cierto que $\nabla f(\overrightarrow{a}) \cdot \overrightarrow{u} = 0$ ?

27. ¿Existirá una función de varias variables $f$ tal que $\|\nabla f(\overrightarrow{a})\| = 5$ y la derivada direccional $f'(a, \overrightarrow{u}) = 7$?

28. Si el máximo valor de la derivada direccional de $f$ en $\overrightarrow{a}$ es 4, ¿cuál es el valor mínimo de la derivada direccional en $\overrightarrow{a}$ ? (Explique)

29. Suponga que $f(1,2) = 2$, $f(0{,}99, 2{,}01) = 1{,}98$ ¿Cuales derivadas direccionales $f'((1,2)\,;\overrightarrow{u})$ pueden estimarse con esta información? ¿Cuál es el estimativo de $f'((1,2)\,;\overrightarrow{u})$?

30. ¿Cómo se halla la diferencial total?

31. ¿Qué significa la Regla de la Cadena? ¿Cómo aplica? Dé ejemplos.

32. ¿Qué significa que la ecuación $F(x,y,z) = 0$ defina a $z$ como función de $x, y$ implícitamente? Dé un ejemplo.

33. Halle $\dfrac{\partial z}{\partial u}, \dfrac{\partial z}{\partial v}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}$si $z = x^2 + y^2$, $x = u - v$, $y = ve^{2u}$.

34. Explique el significado geométrico del gradiente.

35. Sea $g(x,y) = y^2 - 3x^2$, $f(x,y) = (x + y^2, xy)$ y $a = (1,-1)$. Sea $k = g \circ f$. ¿Es $k$ un campo escalar o un campo vectorial? Halle

    *a)* $\nabla k(x,y)$

    *b)* un valor aproximado de $k(1{,}01, -0{,}99)$.

36. ¿Qué significan los siguientes enunciados?

    $f$ tiene un máximo local en $(a,b)$.

    $f$ tiene un máximo absoluto en $(a,b)$.

    $f$ tiene un mínimo local en $(a,b)$.

    $f$ tiene un mínimo absoluto en $(a,b)$.

    $f$ tiene un punto silla en $(a,b)$.

37. Enuncie el criterio para hallar puntos extremos de un función $z = f(x,y)$.

38. ¿Para que valores de la constante $k$, la función $f(x,y) = x^2 + kxy + 3y^2$ tiene un mínimo relativo en $(0,0)$?

39. ¿Qué es un conjunto cerrado en $\mathbb{R}^2$? ¿Qué es un conjunto acotado? ¿Qué es un conjunto conexo? ¿Qué es un conjunto convexo? ¿Qué es una región?

40. Enuncie el Teorema de Valores Extremos para funciones de dos variables.

    ¿Cómo se encuentran los valores que garantizan el Teorema de los Valores Extremos? Dé un ejemplo.

41. Explique el Método de Multiplicadores de Lagrange para encontrar los valores extremos de $f(x,y)$ sujeta a la restricción $g(x,y) = k$. Haga lo mismo con $f(x,y,z)$ sujeta a la restricción $g(x,y,z) = k$. Dé ejemplos.

42. Se quiere maximizar $f(x,y) = ax+by$ sujeta a la restricción $x^2+y^2 = c$. Si un máximo ocurre en el punto $(9, 16)$, los posibles valores de las constantes son:

   *a*) $a = -9$, $b = 16$, $c = 337$
   
   *b*) $a = 9$, $b = 16$, $c = 337$
   
   *c*) $a = -16$, $b = -9$, $c = 337$

## 2.3. Problemas resueltos

1. Determine si existe

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen} 2x - 2x + y}{x^3 + y}.$$

   *a*) Calculemos el límite cuando nos acercamos a través del eje $x$ En este caso tenemos $y = 0$ y por lo tanto tenemos

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} \frac{\operatorname{sen} 2x - 2x + 0}{x^3 + 0} &= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 2x - 2x}{x^3} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{2\cos 2x - 2}{3x^2} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{-4\operatorname{sen} 2x}{6x} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{-8\cos 2x}{6} = -\frac{4}{3}\end{aligned}$$

   Observe que aquí hemos utilizado la regla de l'Hôpital tres veces sucesivas, dado que se trataba de casos de límites indeterminados de la forma $0/0$.

   *b*) Examinaremos el límite cuando nos acercamos a través del eje $y$,haciendo $x = 0$, así tenemos

$$\lim_{(0,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen} 2\cdot 0 - 2\cdot 0 + y}{0^3 + y} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{y} = 1$$

   Los límites a través de acercamientos diferentes son distintos, y por ende no existe el límite, de la misma manera que no existía en cálculo de funciones de una variable cuando el límite por la izquierda daba distinto del límite por la derecha.

2. Determine si existe

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x-y)^2}{x^2+y^2}$$

En este caso, si bien las funciones del numerador y el denominador son ambas continuas, el cociente entre ambas no está definido en el origen. Para tratar de ver si existe un límite, analizaremos primero los acercamientos por los ejes.

*a*) A través del eje $x$, haciendo $y = 0$ tenemos

$$\lim_{(x,0)\to(0,0)} \frac{(x-0)^2}{x^2+0^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

y a través del eje $y$, haciendo $x = 0$, tenemos

$$\lim_{(x,0)\to(0,0)} \frac{(x-0)^2}{x^2+0^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

Parecería que deberíamos probar ahora que el límite es 1. Sin embargo, conviene analizar otros acercamientos al origen. Debemos recordar que una sola coincidencia entre límites por distintos acercamientos no garantiza nada; por el contrario, un solo caso de límite distinto prueba que no existe el límite.

*b*) Normalmente, se suelen calcular a ese efecto los límites radiales, en los cuales se determina el límite por líneas rectas oblicuas que convergen al punto en análisis. En nuestro caso, las líneas rectas que convergen al origen son de la forma: $y = mx$. Determinemos, pues, los límites acercándonos por estos caminos:

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,mx)\to(0,0)} \frac{(x-mx)^2}{x^2+(mx)^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{[x(1-m)]^2}{x^2(1+m^2)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{x^2(1-m)^2}{x^2(1+m^2)} = \frac{(1-m)^2}{(1+m^2)}
\end{aligned}$$

Este último valor depende de $m$; por lo tanto variará de acuerdo al camino de acercamiento al origen. Como los límites no son todos iguales para todos los acercamientos, se concluye que el **límite no existe.**

3. Determine si la función $f$

$$f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

tiene límite en $(0,0)$.
**Solución.** La función $f$ está definida para todo valor del plano $xy$ con excepción del origen. En todos los puntos del eje $x$ , distintos del origen, el valor de $f$ es

$$f(x,0) = \frac{x^2 - 0}{x^2 + 0} = 1$$

Por lo tanto, el límite de $f(x,y)$ cuando $(x,y)$ tiende a $(0,0)$ a lo largo del eje $x$ es

$$\lim_{(x,0)\to(0,0)} f(x,0) = \lim_{(x,0)\to(0,0)} \frac{x^2 - 0}{x^2 + 0} = +\,1$$

En forma semejante, el límite de $f(x,y)$ cuando $(x,y)$ tiende a $(0,0)$ a lo largo del eje $y$ es

$$\lim_{(0,y)\to(0,0)} f(0,y) = \lim_{(0,y)\to(0,0)} \frac{0 - y^2}{0 + y^2} = -\,1$$

Entonces, se obtienen distintas respuestas según como $(x,y) \to (0,0)$. En efecto, hay puntos arbitrariamente próximos a $(0,0)$ para los cuales el valor de $f$ es 1 y otros igualmente cercanos cuyo valor de $f$ es -1. El límite no existe.

4. Determine si existe el límite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2 + y^4}.$$

Si tomamos $y = mx$ tenemos que

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx}} \frac{x^2}{x^2 + y^4} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2 + m^4x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2(1 + m^4x^2)} = 0.$$

Sin embargo si tomamos el camino $y = \sqrt{x}$ $(x > 0)$ que

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=\sqrt{x},\, x>0}} \frac{x^2}{x^2 + y^4} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2 + x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}.$$

Luego el límite no existe.

5. Use $\epsilon$ - $\delta$.para determinar

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Primero calculemos los límites radiales.

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,mx)\to(0,0)} \frac{xmx}{\sqrt{x^2+(mx)^2}} &= \lim_{x\to 0} \frac{mx^2}{\sqrt{x^2(1+m^2)}} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{mx^2}{|x|\sqrt{(1+m^2)}} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{m}{\sqrt{(1+m^2)}}\,|x| = 0
\end{aligned}$$

Dan todos lo mismo Podríamos calcular el límite por otros caminos y comprobar que también dan 0.(Por ejemplo acérquese a través de $y = x^2$). De esa manera, se puede conjeturar que el límite es 0. Para comprobarlo, debemos ver que el valor 0 satisface alguna de las definiciones de límite aplicada a este caso particular. Lo intentaremos con la definición según $\epsilon$ - $\delta$, que establece:

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x;y) &= L \Leftrightarrow \forall\epsilon > 0 \;\; \exists \;\; \delta > 0 : \\
0 &< \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < \delta \Rightarrow |f(x;y) - L| < \epsilon
\end{aligned}$$

En términos intuitivos, esto quiere decir que siempre habrá un disco alrededor de $(x_0, y_0)$ para el cual los valores de la función estarán tan cerca del límite como queramos. El radio del disco ($\delta$) será función de la cercanía al límite ($\pm\epsilon$) que impongamos. En nuestro caso, postulamos $L = 0$. Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
|f(x,y) - L| &= \left| \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0 \right| = \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} \\
&\leq \frac{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{x^2+y^2}
\end{aligned}$$

Si hacemos $\delta = \epsilon$ tenemos que si

$$\sqrt{x^2+y^2} < \delta$$

entonces

$$|f(x,y) - L| < \epsilon$$

Por lo tanto el límite existe y es cero.

**Nota:** Este límite se puede determinar directamente teniendo en cuenta que

$$0 \leq \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \sqrt{x^2+y^2}$$

Como $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} 0 = 0$ y $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2+y^2} = 0$, entonces

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

Por lo tanto cuando $(x,y) \to (0,0)$ la función $\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \to 0.$

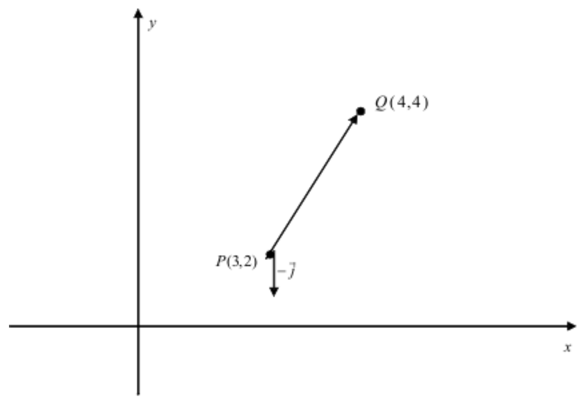
6. Calcule el límite de la función $f(x,y) = e^x y$ cuando $(x,y) \to (0,1)$, esto es hallar

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} e^x y$$

Se trata en este caso de funciones continuas ambas, y su producto está definido en el punto indicado, por lo tanto el producto es continuo allí. Entonces el límite de la función es igual al valor de la función, o sea $f(0,1) = 1$.

7. La función $F(x,y) = \cos(x^3 - 4xy + y^2)$ es continua en todo punto del plano, puesto que la función $g(x,y) = x^3 - 4xy + y^2$ es continua (como un polinomio) en toda su extensión. También $f(t) = \cos t$ es continua para todo número $t \in \mathbb{R}$. y $F(x,y) = f(g(x,y))$.

8. Sea $T$ grados la temperatura en cualquier punto $(x,y)$ de una placa metálica. En el punto $P(3,2)$ la temperatura crece a razón de $2\sqrt{5}$ grados por decímetro en la dirección de $P$ hacia $Q(4,4)$ y disminuye 1 grado por decímetro en la dirección $-\overrightarrow{j}$. Halle:
*a*) El gradiente de $T$ en el punto $(3,2)$.
*b*) ¿En qué dirección la temperatura aumenta lo más rápido posible en el punto $(3,2)$?
*c*) ¿En qué dirección la temperatura permanece constante en el punto $(3,2)$?
***Solución***
a) Sea $T(x,y)$ la temperatura en cualquier punto $(x,y)$ de la placa metálica. Como la razón de cambio de $T$ en cualquier punto $(x,y)$ en la dirección unitaria $\overrightarrow{u}$ viene dada por la derivada direccional, entonces $T'((x,y);\overrightarrow{u}) = \nabla T(x,y) \cdot \overrightarrow{u}$. Considerando la gráfica siguiente




El vector unitario en la dirección del vector $\overrightarrow{PQ}$ está dada por

$$\overrightarrow{u}=\frac{\overrightarrow{PQ}}{\left\|\overrightarrow{PQ}\right\|}=\frac{(4,4)-(3,2)}{\|(1,2)\|}=\frac{(1,2)}{\sqrt{5}}=\left(\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}}\right).$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}T'\left((3,2);\left(\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\right) &= \nabla T(3,2)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\\ &= .\left(\frac{\partial T}{\partial x}(3,2),\frac{\partial T}{\partial y}(3,2)\right)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{\partial T}{\partial x}(3,2)+\frac{2}{\sqrt{5}}\frac{\partial T}{\partial y}(3,2)=2\sqrt{5}.\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}T'((3,2);-\mathbf{j}) &= \left(\frac{\partial T}{\partial x}(3,2),\frac{\partial T}{\partial y}(3,2)\right)\cdot(0,-1)\\ &= -\frac{\partial T}{\partial y}(3,2)=-1\Longrightarrow\frac{\partial T}{\partial y}(3,2)=1.\end{aligned}$$

Puesto que $\frac{1}{\sqrt{5}}\frac{\partial T}{\partial x}(3,2)+\frac{2}{\sqrt{5}}\frac{\partial T}{\partial y}(3,2)=2\sqrt{5}$ y $\frac{\partial T}{\partial y}(3,2)=1$ tenemos que $\frac{\partial T}{\partial x}(3,2)+2=10\Longrightarrow\frac{\partial T}{\partial x}(3,2)=8$. Así el gradiente está dado por

$$\nabla T(3,2)=(8,1).$$

b) La temperatura aumenta más rápidamente en la dirección del gradiente en el punto $(3,2)$. Por lo tanto la dirección unitaria de máximo crecimiento es

$$\overrightarrow{u}=\frac{\nabla T(3,2)}{\|\nabla T(3,2)\|}=\frac{(8,1)}{\sqrt{65}}$$

y el máximo crecimiento es

$$\begin{aligned}
T'((3,2);\overrightarrow{u}) &= \nabla T(x,y)\cdot\frac{\nabla T(3,2)}{\|\nabla T(3,2)\|}\\
&= \frac{\nabla T(x,y)\cdot\nabla T(3,2)}{\|\nabla T(3,2)\|}=\frac{\|\nabla T(3,2)\|^2}{\|\nabla T(3,2)\|}\\
&= \|\nabla T(3,2)\|=\sqrt{65}.
\end{aligned}$$

c) La temperatura permanece constante en una dirección $\overrightarrow{u}$ donde $T'((3,2);\overrightarrow{u})=\nabla T(x,y)\cdot\overrightarrow{u}=0$ o sea en una dirección $\overrightarrow{u}$ perpendicular al gradiente. En general si tenemos un vector $(a,b)$ un vector perpendicular a él es $(-b,a)$ (también puede ser $(b,-a)$).Cualquiera de los dos vectores lo normalizamos y esa sería una de las direcciones. Así,

$$\overrightarrow{u}=\frac{(-1,8)}{\sqrt{65}} \text{ o } \overrightarrow{u}=\frac{(1,-8)}{\sqrt{65}}\ .$$

9. Halle los valores de las constantes $a,b,c$ tales que la derivada direccional de $f(x,y,z)=axy^2+byz+cz^2x^3$ en el punto $(1,2,-1)$ tenga valor máximo 64 en una dirección paralela al eje $z$.
**Solución**.Como la derivada direccional de $f$ en el punto $\overrightarrow{a}$ en la dirección $\overrightarrow{u}$ es

$$\begin{aligned}
f'(\overrightarrow{a};\overrightarrow{u}) &= \nabla f(\overrightarrow{a})\cdot\overrightarrow{u}\\
&= \|\nabla f(\overrightarrow{a})\|\,\|\overrightarrow{u}\|\cos\theta
\end{aligned}$$

Cuando $\cos\theta=1$ obtenemos el valor máximo de la derivada direccional. En este caso

$$\overrightarrow{u}=\frac{\nabla f(\overrightarrow{a})}{\|\nabla f(\overrightarrow{a})\|}$$

y

$$f'(\overrightarrow{a};\overrightarrow{u})=\|\nabla f(\overrightarrow{a})\|=64.$$

Tomemos $\overrightarrow{a}=(1,2,-1)$ y la dirección

$$\overrightarrow{u}=\frac{\nabla f(1,2,-1)}{\|\nabla f(1,2,-1)\|}=\frac{\nabla f(1,2,-1)}{64}.$$

Dado que

$$\nabla f(x,y,z)=\left(ay^2+3cz^2x^2,2axy+bz,by+2czx^3\right),$$

entonces

$$\nabla f(1,2,-1)=(4a+3c,4a-b,2b-2c)\,.$$

Puesto que esta dirección debe ser paralela al eje $z$, las dos primeras componentes deben ser cero Así tenemos

$$\begin{aligned} 4a + 3c &= 0 \\ 4a - b &= 0 \end{aligned}$$

Como

$$\|\nabla f(1,2,-1)\| = 2\,|b-c| = 64 \Longrightarrow b - c = \pm 32.$$

Así tenemos el sistema de ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 4a + 3c &=& 0 \\ 4a - b &=& 0 \\ b - c &=& -32 \end{array} \right. \quad \text{o} \left\{ \begin{array}{rcl} 4a + 3c &=& 0 \\ 4a - b &=& 0 \\ b - c &=& 32 \end{array} \right.$$

Resolviendo el sistema tenemos dos casos (1) $a = 6$, $b = 24$, $c = -8$ y en ese caso tenemos $f(x,y,z) = 6xy^2 + 24yz - 8z^2x^3$.(2) $a = -6$, $b = -24$, $c = 8$ y en ese caso tenemos $f(x,y,z) = -6xy^2 - 24yz + 8z^2x^3$

10. Sea $f(x,y) = \left\{ \begin{array}{lll} 2x & si & x = y \\ 0 & si & x \neq y \end{array} \right.$

   *a*) Determine si $f$ es continua en $(0,0)$

   **Solución:** Claramente la función es continua en el origen. Puesto que

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ y\neq x}} f(x,y) = 0 = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ y=x}} f(x,y) = f(0,0)$$

   *b*) Halle $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

   **Solución:** Por definición $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f((0,0)+t\mathbf{j}) - f(0,0)}{t} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(t,0)}{t} = 0$

   Similarmente $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f((0,0)+t\mathbf{j}) - f(0,0)}{t} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(0,t)}{t} = 0$

   (En ambos casos $t \to 0$ pero $t \neq 0$).

   *c*) Demuestre que la derivada direccional de $f$ en el origen (0,0) en la dirección $\mathbf{i} + \mathbf{j}$ es $\frac{2}{\sqrt{2}}$.

   Observemos que el vector $\overrightarrow{p} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ no es un vector unitario y por lo tanto lo tenemos que normalizar $\|\overrightarrow{p}\| = \sqrt{2}$, así el vector unitario es dado por $\overrightarrow{u} = \frac{\overrightarrow{p}}{\|\overrightarrow{p}\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Así la derivada direccional es dada por

$$\begin{aligned} f'((0,0);\mathbf{i}+\mathbf{j}) &= \lim_{t\to 0} \frac{f((0,0)+t(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})) - f(0,0)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{f(\frac{t}{\sqrt{2}},\frac{t}{\sqrt{2}}) - f(0,0)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{f(\frac{t}{\sqrt{2}},\frac{t}{\sqrt{2}})}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{2\frac{t}{\sqrt{2}}}{t} = \frac{2}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

*d*) ¿Es la función $f$ diferenciable en $(0,0)$? Si $f$ fuera diferenciable en el origen $(0,0)$. entonces $f'((0,0);\frac{\mathbf{i}+\mathbf{j}}{\sqrt{2}})$ sería igual a $\nabla f(0,0)\cdot(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}) = (0,0)\cdot(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}) = 0$, y esto nos lleva a una contradicción puesto que $f'((0,0);\mathbf{i}+\mathbf{j}) = \frac{2}{\sqrt{2}}$.

11. La derivada direccional de una función $z = f(x,y)$ en el punto $P(1,2)$ en la dirección hacia el punto $Q(1,3)$ es $\frac{-2}{5}$ y la derivada direccional hacia el punto $R(-1,1)$ es 6. Halle el gradiente de $f$ en el punto $P$.

**Solución:** Hallemos el vector $\overrightarrow{PQ} = (0,1)$. Observemos que este es un vector unitario que coincide con el vector $\mathbf{j}$ Así su derivada direccional en el punto $(1,2)$ es dada por $\frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = \frac{-2}{5}$. Ahora el vector $\overrightarrow{PR} = (-2,-1)$ y su longitud es $\left\|\overrightarrow{PR}\right\| = \sqrt{5}$. El vector unitario es $\overrightarrow{u} = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2,-1)$. Por lo tanto, puesto que $f'((1,2);\frac{1}{\sqrt{5}}(-2,-1)) = 6$ $f'((1,2);\frac{1}{\sqrt{5}}(-2,-1)) = \nabla f(1,2)\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}(-2,-1) = (\frac{\partial f}{\partial x}(1,2),\frac{\partial f}{\partial y}(1,2))\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}(-2,-1) = \frac{-2}{\sqrt{5}}\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) - \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = \frac{-2}{\sqrt{5}}\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) + \frac{2}{5\sqrt{5}} = 6$ entonces $\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = \frac{\sqrt{5}}{2}\left(\frac{2}{5\sqrt{5}} - 6\right) = \frac{1}{5} - 3\sqrt{5}.$ Así el gradiente de $f$ es dado por $\nabla f(1,2) = (\frac{\partial f}{\partial x}(1,2),\frac{\partial f}{\partial y}(1,2)) = (\frac{1}{5} - 3\sqrt{5}, \frac{-2}{5})$.

12. Considere la superficie de nivel $S = L_g(0)$ donde

$$g(x, y, z) = x^2 - \frac{y}{z^2} \quad (z \neq 0).$$

*a*) Encuentre los puntos de $S$ donde el vector normal es paralelo al plano $xy$.

*b*) Encuentre el plano tangente a $S$ en el punto $(1, 1, 1)$.

*c*) Encuentre la recta normal al plano en el punto $(1, 1, 1)$.

*d*) Encuentre un vector unitario en la dirección de máximo crecimiento de $g$ en el punto $(1, 1, 1)$.

**Solución.**

$(a)$ El vector normal a la superficie $S$ están dados por el gradiente de $g$, $\nabla g$, y este gradiente está dado por

$$\nabla g(x, y, z) = \left(2x, -\frac{1}{z^2}, \frac{2y}{z^3}\right) \quad z \neq 0.$$

Para que este gradiente sea paralelo al plano $xy$, la tercera componente del gradiente debe ser cero, es decir $\dfrac{2y}{z^3} = 0 \Longrightarrow y = 0$. Así los puntos sobre la superficie $S$ son aquellos tales que $x^2 = \dfrac{y}{z^2}$ con $y = 0$, esto implica que $x = 0$, Por lo tanto los puntos de S son todos los puntos de la forma $(0, 0, z)$ $(z \neq 0)$.

$(b)$ El punto $(1, 1, 1) \in S$ y $\nabla g(1, 1, 1) = (2, -1, 2)$ es normal a la superficie en dicho punto. Por lo tanto el plano tangente está dado por

$$2(x - 1) - (y - 1) + 2(z - 1) = 0 \quad \text{o} \quad 2x - y + 2z = 3.$$

$(c)$ La ecuación vectorial de la recta normal está dada por

$$\overrightarrow{\alpha(t)} = (1, 1, 1) + t(2, -1, 2)$$

$(d)$ La dirección de máximo crecimiento está en la dirección del gradiente. Así el vector unitario está dado por

$$\overrightarrow{u} = \frac{\nabla g(1, 1, 1)}{\|\nabla g(1, 1, 1)\|} = \frac{(2, -1, 2)}{3} = (2/3, -1/3, 2/3)$$

13. Suponga que una partícula se lanza desde la superficie $x^2 + y^2 - z^2 = -1$ en el punto $(1, 1, \sqrt{3})$ en una dirección normal a la superficie en el tiempo $t = 0$ con una rapidez de 10 unidades por segundo. ¿Cuándo cruza la

partícula el plano $xy$?
**Solución.**
La superficie $x^2+y^2-z^2=-1$ es la superficie de nivel $L_g(0)$ de la función

$$g(x,y,z)=x^2+y^2-z^2+1.$$

El gradiente de $g$ es normal a la superficie dada.
$\nabla g(x,y,z) = (2x,2y,-2z) \Longrightarrow \nabla g(1,1,\sqrt{3}) = (2,2,-2\sqrt{3})$. La recta normal está dada por

$$\overrightarrow{r(t)}=(1,1,\sqrt{3})+t\lambda(2,2,-2\sqrt{3}),\ t\geq 0.$$

$v(t)=\left\|\overrightarrow{r'(t)}\right\| = \left\|\lambda(2,2,-2\sqrt{3})\right\| = \lambda\sqrt{20}=10 \Longrightarrow \lambda=\frac{10}{\sqrt{20}}=\sqrt{5}$. Por lo tanto el vector posición está dado por

$$\begin{aligned}\overrightarrow{r(t)} &= \left(1,1,\sqrt{3}\right)+\sqrt{5}t\left(2,2,-2\sqrt{3}\right)\\ &= \left(1+2\sqrt{5}t,1+2\sqrt{5}t,\sqrt{3}-2\sqrt{5}\sqrt{3}t\right),t\geq 0.\end{aligned}$$

La partícula cruzará el plano $xy$ cuando la tercera componente de la posición es cero, es decir cuando

$$\sqrt{3}-2\sqrt{5}\sqrt{3}t=0 \Longrightarrow t=\frac{1}{2\sqrt{5}}.$$

Así, concluimos que la partícula atravezará el plano $xy$ en el instante $t=\frac{1}{2\sqrt{5}}$ segundos.

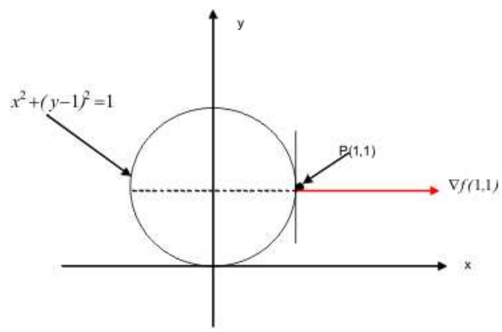
14. Considere la función $z=f(x,y)=x^2+(y-1)^2$

   *a*) Bosqueje la curva de nivel de $f$ que pasa por el punto $(1,1)$ y señale el gradiente tomado desde el punto.

   *b*) Halle la derivada direccional de $f$ en el punto $(1,1)$ y en la dirección hacia $(-1,6)$.

   *c*) Si $x=\dfrac{u}{v}$, $y=uv$. Halle $\dfrac{\partial z}{\partial u}$.

   *d*) Halle la ecuación del plano tangente a la gráfica de $f$ en el punto $(1,1,\ f(1,1))$.
   **Solución:** **(a)** $f(1,1)=1$, por lo tanto la curva de nivel está dada por $L_f(1)=\{(x,y):f(x,y)=1\}=\{(x,y):x^2+(y-1)^2=1\}$, una circunferencia de radio 1 y centro en $(0,1)$. $\nabla f(x,y)=(2x,2(y-1))$, entonces $\nabla f(1,1)=(2,0)$. Ver figura




**(b)** Normalizamos la dirección $\overrightarrow{y} = (-1, 6)$ obteniendo el vector unitario $\overrightarrow{u} = \dfrac{\overrightarrow{y}}{\|\overrightarrow{y}\|} = (-1/\sqrt{37}, 6/\sqrt{37})$. Así, la derivada direccional $f'((1,1); \overrightarrow{u}) = \nabla f(1,1) \cdot \overrightarrow{u} = (2,0) \cdot (-1/\sqrt{37}, 6/\sqrt{37}) = -2/\sqrt{37}$.**(c)** Aplicando regla de la cadena tenemos $\dfrac{\partial z}{\partial u} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial u} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial u} = 2x\dfrac{1}{v} + 2(y-1)v = 2\dfrac{u}{v^2} + 2v(uv-1)$. El vector normal del plano tangente a la gráfica de $f$ es $N = \left(-\dfrac{\partial f}{\partial x}, -\dfrac{\partial f}{\partial y}, 1\right) = (-2x, -2(y-1), 1)$ y en el punto $(1, 1, f(1,1)) = (1,1,1)$ el vector normal es $(-2,0,1)$. Así la ecuación del plano es $-2(x-1)+(z-1) = 0$ o $-2x + z + 1 = 0$.

15. Encuentre los valores extremos de $f(x,y) = x^3 + x^2 + \frac{y^2}{3}$en el disco $x^2 + y^2 \leq 36$.
**Solución:** Primero hallemos los puntos críticos al interior del disco, calculando las derivadas parciales e igualándolas a cero. $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 2x = 0$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \frac{2}{3}y = 0$. Al resolver el sistema tenemos que los puntos críticos son $(0,0)$, y $(-2/3, 0)$. Hallando la matriz Hessiana tenemos

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6x+2 & 0 \\ 0 & 2/3 \end{bmatrix}$$

En el punto $(0,0)$ tenemos $\det(H(0,0)) = 4/3 > 0$ y $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 2 > 0$. Entonces el punto $(0,0)$ es un mínimo local de $f$. En el punto $(-2/3, 0)$ tenemos $\det(H(-2/3,0)) = -4/3 < 0$. Entonces el punto $(-2/3, 0)$ es un punto silla. Sobre la frontera tenemos que $x^2 + y^2 = 36$ es una curva de nivel de la función $g(x,y) = x^2 + y^2 - 36$. Aplicando el método de Lagrange tenemos que

$$\nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y)$$

o sea

$$(3x^2 + 2x, \frac{2}{3}y) = \lambda(2x, 2y)$$

de lo cual obtenemos $3x^2 + 2x = \lambda(2x)$ y $\frac{2}{3}y = \lambda(2y)$. De la segunda ecuaciones tenemos $y = 0$ o $\lambda = 1/3$.Si $y = 0$, tenemos $x = \pm 6$. Hallamos $f(6,0) = 252$, $f(-6,0) = -180$. Si $\lambda = 1/3$, tenemos de la primera ecuación $3x^2 + 2x = (1/3)(2x)$ o $3x^2 + 4x/3 = 0$, cuya solución es $x = 0$ o $x = -4/9$. Si $x = 0$, tenemos $y = \pm 6$. Hallamos $f(0,6) = 12$, $f(0,-6) = 12$. Si $x = -4/9$, de la ecuación de la circunferencia tenemos $y^2 = 36 - x^2 = 36 - 16/81 = \dfrac{2900}{81}$, entonces $y = \pm(10/9)\sqrt{29}$. Encontramos que $f(4/9, \pm(10/9)\sqrt{29}) = 107{,}9$. Finalmente obtenemos que el máximo absoluto es $f(6,0) = 252$ y el mínimo absoluto es $f(-6,0) = -180$.

16. Halle la derivada direccional de $f(x,y) = x^2 - 3xy$ a lo largo de la parábola $y = x^2 - x + 2$ en el punto $(1,2)$ .
**Solución:** El gradiente de $f$ está dado por $\nabla f(x,y) = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}) = (2x - 3y, -3x)$.En el punto $(1,2)$ tenemos que $\nabla f(1,2) = (-4,-3)$. La parábola la podemos parametrizar por $\overrightarrow{r}(t) = (t, t^2 - t + 2)$. Observemos que para $t = 1$, $\overrightarrow{r}(1) = (1,2)$ que es el punto dado. El vector velocidad es dado por $\overrightarrow{r'}(t) = (1, 2t-1)$ y $\overrightarrow{r'}(1) = (1,1)$ el cual tiene norma $||\overrightarrow{r'}(1)\| = \sqrt{2}$ . Así $\overrightarrow{T}(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$ . Por lo tanto la derivada direccional a lo largo de la parábola en el punto $(1,2)$ es

$$f'\left((1,2); \overrightarrow{T}(1)\right) = \nabla f(1,2) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1) = -\frac{7}{\sqrt{2}}$$

17. Suponga que se calienta un cilindro circular recto sólido y que su radio $r$ aumenta a razón de 0.2 cm por hora y su altura $h$ a 0.5 cm por hora. Encuentre la razón de aumento del área con respecto al tiempo, cuando el radio mide 10 cm y altura 100.
**Solución:** La fórmula del área total de un cilindro es $S(r,h) = 2\pi rh + 2\pi r^2$. En consecuencia,

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial r}\ \frac{dr}{dt} + \frac{\partial S}{\partial h}\ \frac{dh}{dt} = (2\pi h + 4\pi r)(0{,}2) + (2\pi r)(0{,}5)$$

Cuando $r = 10$ y $h = 100$, $\dfrac{dS}{dt} = (2\pi \cdot 100 + 4\pi \cdot 10)(0{,}2) + (2\pi \cdot 10)(0{,}5) = 58\pi\ cm^2/hora$.

18. Suponga que $w = x^2y + y + xz$, donde $x = \cos\theta$, $y = \text{sen }\theta$, y $z = \theta^2$. Encuentre $dw/d\theta$ y evalúela para $\theta = \pi/3$.
**Solución**.

$$\begin{aligned}
\frac{dw}{d\theta} &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{d\theta} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{d\theta} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{dz}{d\theta} \\
&= (2xy + z)(-\text{sen }\theta) + (x^2 + 1)(\cos\theta) + (x)(2\theta) \\
&= -2\ \cos\theta\ \text{sen}^2\theta - \theta^2\ \text{sen }\theta + \cos^3\theta + \cos\theta + 2\theta\cos\theta
\end{aligned}$$

En $\theta = \pi/3$, $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$, y $z = \frac{\pi^2}{9}$, así,

$$\frac{dw}{d\theta} = -(2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi^2}{9})\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \left(\frac{1}{4} + 1\right)\frac{1}{2} + \frac{2\pi}{3}\cdot\frac{1}{2} = -\frac{1}{8} - \frac{\pi^2\sqrt{3}}{18} + \frac{\pi}{3}$$

19. Si $w = x^2 + y^2 + z^2 + xy$ donde $x = st$, $y = s - t$ y $z = s + 2t$, encuentre $\partial w/\partial t$.
**Solución.**

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial t} &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} \\
&= (2x + y)(s) + (2y + x)(-1) + (2z)(2) \\
&= (2st + s - t)(s) + (2s - 2t + st)(-1) + (2s + 4t)(2) \\
&= 2s^2t + s^2 - 2st + 2s + 10t
\end{aligned}$$

20. Si $F(x, y, z) = x^3e^{y+z} - y\ \text{sen }(x - z) = 0$ define a $z$ implícitamente como función de $x$ e $y$, encuentre $\partial z/\partial x$.
**Solución.**

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial z} = -\frac{3x^2e^{y+z} - y\cos(x - z)}{x^3e^{y+z} + y\cos(x - z)}$$

21. Sea $z = f(u - v, v - u)$. Muestre que $\dfrac{\partial z}{\partial u} + \dfrac{\partial z}{\partial v} = 0$.
**Solución.** Definamos $x = u - v$, $y = v - u$, entonces $z = f(x(u, v), y(u, v))$. Aplicando regla de la cadena tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x},1 + \frac{\partial z}{\partial y}.(-1) \\
\frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}.(-1) + \frac{\partial z}{\partial y},1
\end{aligned}$$

Así $\dfrac{\partial z}{\partial u} + \dfrac{\partial z}{\partial v} = 0$.

22. Con el cambio de variable $x = r\cos\theta$, $y = r \text{ sen } \theta$, la función $f(x,y)$ se transforma en una función $g(r,\theta)$. Es decir $g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r \text{ sen } \theta)$. Compruebe que

*a)* $\left(\dfrac{\partial g}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\dfrac{\partial g}{\partial \theta}\right)^2 = \|\nabla f(r\cos\theta, r \text{ sen } \theta)\|^2$.

*b)* $\Delta f = \dfrac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial g}{\partial \theta}$ ( El operador de Laplace en coordenadas polares).

**Solución. (a)**

$$\begin{aligned}
x &= r\cos\theta \Longrightarrow \frac{\partial x}{\partial r} = \cos\theta, \quad \frac{\partial x}{\partial \theta} = -r \text{ sen } \theta \\
y &= r \text{ sen } \theta \Longrightarrow \frac{\partial y}{\partial r} = \text{sen } \theta, \quad \frac{\partial y}{\partial \theta} = r\cos\theta
\end{aligned}$$

Usando la regla de la cadena tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial r} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y} sen\theta, \\
\frac{\partial g}{\partial \theta} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x}. - r \text{ sen } \theta + \frac{\partial f}{\partial y}.r\cos\theta. \\
&\Downarrow \\
\frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial \theta} &= -\frac{\partial f}{\partial x} \text{ sen } \theta + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\theta.
\end{aligned}$$

Ahora

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial g}{\partial r}\right)^2 &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y} \text{ sen } \theta\right)^2 \\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \cos^2\theta + 2\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} \text{ sen } \theta\cos\theta + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \text{sen}^2\theta \\
\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial g}{\partial \theta}\right)^2 &= \left(\frac{\partial f}{\partial y}\cos\theta - \frac{\partial f}{\partial x} \text{ sen } \theta\right)^2 \\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \cos^2\theta - 2\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} \text{ sen } \theta\cos\theta + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \text{sen}^2\theta.
\end{aligned}$$

Sumando estas últimas igualdades tenemos

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial g}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial g}{\partial \theta}\right)^2 &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 (\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta) \\
&\quad + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 (\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta) \\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \\
&= \|\nabla f(r\cos\theta, r\ \operatorname{sen}\ \theta)\|^2 .
\end{aligned}$$

(b) Para resolver la segunda parte observemos que las derivadas parciales $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ son funciones de dos variables evaluadas en $(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)$. Así aplicando la regla de la cadena a cada una de estas funciones tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 g}{\partial r^2} &= \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial g}{\partial r}\right) = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}\ \operatorname{sen}\ \theta\right) \\
&= \cos\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + \operatorname{sen}\ \theta\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right).
\end{aligned}$$

Aplicamos regla de la cadena a $\dfrac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\ \operatorname{sen}\ \theta)$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\ \operatorname{sen}\ \theta)$, derivando respecto a $r$ obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{\partial y}{\partial r} \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cos\theta + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\ \operatorname{sen}\ \theta,
\end{aligned}$$

similarmente

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial r} \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\cos\theta + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\ \operatorname{sen}\ \theta,
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 g}{\partial r^2} &= \cos\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + \operatorname{sen}\ \theta\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \\
&= \cos^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\cos\theta\ \operatorname{sen}\ \theta\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \operatorname{sen}^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.
\end{aligned}$$

Ahora

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} &= \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial g}{\partial \theta}\right) = \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial f}{\partial x}.-r \text{ sen } \theta + \frac{\partial f}{\partial y}.r\cos\theta\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial f}{\partial x}.-r \text{ sen } \theta\right) + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial f}{\partial y}.r\cos\theta\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right).-r \text{ sen } \theta + \frac{\partial f}{\partial x}.-r\cos\theta + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right).r\cos\theta \\
&\quad + \frac{\partial f}{\partial y}.-r \text{ sen } \theta \\
&= \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{\partial y}{\partial \theta}\right].-r \text{ sen } \theta + \frac{\partial f}{\partial x}.-r\cos\theta \\
&\quad + \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial \theta}\right].r\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}.-r \text{ sen } \theta \\
&= \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}.-r \text{ sen } \theta + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.r\cos\theta\right].-r \text{ sen } \theta + \frac{\partial f}{\partial x}.-r\cos\theta \\
&\quad + \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}.-r \text{ sen } \theta + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.r\cos\theta\right].r\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}.-r \text{ sen } \theta \\
&= r^2\text{sen}^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2r^2\cos\theta \text{ sen } \theta\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + r^2\cos^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x} \\
&\quad - r \text{ sen } \theta\frac{\partial f}{\partial y}
\end{aligned}$$

De aquí tenemos que

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} = \text{sen}^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2\cos\theta \text{ sen } \theta\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + \cos^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{1}{r}\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{r}\text{ sen } \theta\frac{\partial f}{\partial y}$$

Puesto que

$$\frac{\partial g}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}\text{ sen } \theta$$

entonces

$$\frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial y}\text{ sen } \theta.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial r} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta\right) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta\right) \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \Delta f
\end{aligned}$$

23. Si $u = f(x/y)$ $(y \neq 0)$. Muestre que $u$ satisface la ecuación

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

**Solución**. Observemos que $f$ es una función de una sola variable. Si hacemos $t = x/y$, entonces $u(x,y) = f(t(x,y))$. Aplicando la regla de la cadena tenemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{df}{dt}\frac{\partial t}{\partial x} = f'(t)\frac{1}{y}\\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{df}{dt}\frac{\partial t}{\partial y} = f'(t)\frac{-x}{y^2}.\end{aligned}$$

Claramente

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = f'(t)\frac{x}{y} + f'(t)\frac{-x}{y} = 0.$$

## 2.4. Exámenes cortos realizados

**QUIZ 1**

1. Considere la función $z = f(x,y) = (x-1)^2 + y^2$.

   *a*) Bosqueje la curva de nivel de $f$ que pasa por el punto $(1,1)$ y señale el gradiente tomado desde el punto.

   *b*) Halle la derivada direccional de $f$ en el punto $(1,1)$ y en la dirección hacia $(-1,-1)$

2. Sea $w = f(x,y,z)$ una función diferenciable tal que $\nabla f(-1,1,3) = (1,1,-1)$. Use esta información para contestar (a) y (b).

   *a*) Halle la derivada direccional de $f$ en el punto $P = (-1,1,3)$ en la dirección $\overrightarrow{PO}$ hacia el origen.

   *b*) Suponga que la derivada direccional de $f$ en la dirección de máximo crecimiento es 4. Es posible que esto sea cierto? (Explique).

3. Defina la función $f(x,y) = \begin{cases} \frac{2x^2y}{x^2+y^4} & (x,y) \neq 0 \\ 0 & (x,y) = 0 \end{cases}$ Es $f$ continua en (0,0)? Dé razones para su respuesta.

**QUIZ 2**

1. Considere la función $f(x,y) = (x-1)^2 + (y-1)^2$.

   a) Usando diferenciales halle el valor aproximado de $f(1{,}97, 0{,}99)$.

   b) Halle los valores extremos de $f(x,y)$ en el dominio donde $x, y$ satisfacen la ecuación $x^2+y^2 \leq \sqrt{2}$. Además de su cálculo analítico, haga un gráfico de cómo hallaría geométricamente los extremos absolutos de $f$ sobre la circunferencia $x^2+y^2 = \sqrt{2}$.

2. Si la ecuación $xv^2 - v^3 - y = 0$, define a $v$ como función implícita de $x, y$, $v = h(x,y)$. halle $\dfrac{\partial h}{\partial x}, \dfrac{\partial h}{\partial y}$.

**QUIZ 3**

1. Sea $f(x,y) = x^3 - 3x + y^4 + 2y^2$. Halle e identifique los valores máximo relativo, mínimo relativo y puntos silla de $f$ si los hay.

2. Halle los máximos y mínimos valores de $f(x,y) = x - 2y$ donde $x, y$ satisfacen la ecuación $x^2 + y^2 = 30$.

3. Sea $f(x,y) = 2x^2 + 3y^2 - 4x - 5$, donde $x^2 + y^2 \leq 16$. Halle e identifique los valores máximo relativo, mínimo relativo y puntos silla de $f$ si los hay. Además halle los máximos y mínimos absolutos de $f$.

**QUIZ 4.**

1. Aproxime el número $e^{,02}\ln(,99)$.

2. Si $z = f(x,y)$; $x = s/t$, $y = s^2t$, encuentre $\partial z/\partial s$ y $\partial^2 z/\partial t\partial s$ mediante la regla de la cadena y exprese su respuesta final en términos de $s$ y $t$.

3. Calcule $df$ para $f(x,y) = \text{sen}\,(x^2y)$.

4. Sea $f(x,y) = 2x^2 + 3y^2 - 4x - 5$, donde $x^2 + y^2 \leq 16$. Halle e identifique los valores máximo relativo, mínimo relativo y puntos silla de $f$ si los hay. Además halle los máximos y mínimos absolutos de $f$.

5. Suponga que $z$ es una función implícita de $x$ y $y$ ($z = f(x,y)$) donde $xz = x^2\text{sen}\,(y) + z\ln(xy)$. Calcule $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$.

## 2.5. Exámenes parciales anteriores

1. **EXAMEN PARCIAL DE CALCULO III**.(grupo 01)

1. [30 % ] Considere la función $z = f(x, y) = y - x^2$.

   *a*) Haga un bosquejo de las curvas de nivel de $f$ para los valores de $c = 1, c = 0$, y la curva de nivel que pasa por el punto $(2, 1)$. Señale el gradiente tomado desde algún punto que usted escoja sobre alguna de las curvas de nivel que usted dibujó.

   *b*) Explique el significado de la dirección y la norma del gradiente de $f$ en el punto $(2, 1)$.

   *c*) Calcule la deriva direccional en el punto $P(2, 1)$ en la dirección del vector $\overrightarrow{y} = (4, -3)$.

   *d*) Encuentre la ecuación del plano tangente a la gráfica de $f$ en el punto $(3, 2, f(3, 2))$.

   *e*) Si $x = r - s$ y $y = sr$, halle usando regla de la cadena $\dfrac{\partial z}{\partial r}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial s \partial r}$.

2. [10 % ] Defina la función $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} & (x, y) \neq 0 \\ 0 & (x, y) = 0 \end{cases}$. Es $f$ continua en $(0, 0)$? Dé razones para su respuesta.

3. [20 % ] Considere la superficie $S$ definida por

$$x^2 y + 4xz^3 - yz = 0 \qquad (*)$$

   *a*) Encuentre la ecuación vectorial de la recta normal a la superficie $S$ en el punto $P = (1, 2, -1)$.También dé las ecuaciones paramétricas de la la recta normal.

   *b*) La ecuación (*) para $S$ define a $z$ como función implícita de $x$ y $y$. Calcule $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ .

4. [30 % ] Una partícula $\overrightarrow{r(t)}$ se mueve de tal manera que su vector velocidad en cada instante $t$ es $\overrightarrow{v}(t) = \overrightarrow{r'(t)} = (e^t \text{sen } t, e^t, e^t \cos t)$. Halle:

   *a*) el vector tangente unitario $\overrightarrow{T}$ y el vector normal $\overrightarrow{N}$ y exprese el vector aceleración en la forma $\overrightarrow{a(t)} = a_T \overrightarrow{T(t)} + a_n \overrightarrow{N(t)}$.

   *b*) la curvatura en $t = 0$.

*c*) la distancia recorrida por la partícula desde $t = 0$ hasta $t = 2$.

*d*) la función longitud de arco $s(t)$ iniciando desde $t = 0$ y exprese el parámetro $t$ en términos de $s$.

5. [10 % ] Suponga que $\overrightarrow{B(t)} = \overrightarrow{T(t)} \times \overrightarrow{N(t)}$.

   *a*) Muestre que $\dfrac{d\overrightarrow{B}}{dt}$ es perpendicular a $\overrightarrow{B}$.

   *b*) Muestre que $\dfrac{d\overrightarrow{B}}{dt} = \overrightarrow{T(t)} \times \overrightarrow{N'(t)}$ y que $\dfrac{d\overrightarrow{B}}{dt}$ es colineal con $\overrightarrow{N(t)}$.

**EXAMEN OPCIONAL DE CALCULO III.(grupo 01)**

1. [20 % ] Considere la función $z = f(x, y) = (x - 3)^2 + y^2$

   i) Bosqueje la curva de nivel de $f$ que pasa por el punto $(2, 1)$ y señale el gradiente tomado desde el punto.

   ii) Halle la derivada direccional de $f$ en el punto $(2, 1)$ y en la dirección hacia $(3, 4)$.

   iii) Suponga que la derivada direccional de $f$ en el punto $(2, 1)$ en la dirección de máximo crecimiento es 7. Es posible que esto sea cierto? (Explique).

   iv) Halle la ecuación vectorial y ecuaciones paramétricas de de la recta tangente a la gráfica de $f$ en el punto $(2, 1, f(2, 1))$.

2. [15 % ] Use la regla de la cadena para hallar $\dfrac{\partial z}{\partial u}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial v \partial u}$ , donde $z = f(x, y)$ es una función con derivadas de orden dos continuas y $x = u + \text{sen } v$ $y = uv$.

3. [15 % ] Sea $f(x, y) = \begin{cases} 2x & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases}$

   *a*) Determine si $f$ es continua en $(0, 0)$.

   *b*) Halle $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ y la derivada direccional de $f$ en $(0, 0)$ en la dirección $\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$. ¿Es la función $f$ diferenciable en $(0, 0)$?

4. [20 % ] Considere la superficie $S$ definida por

$$x^2 \text{sen } (\pi y) + z \ln(xy) - xz - 2 = 0 \qquad (*)$$

   *a*) Encuentre la ecuación del plano tangente a la superficie $S$ en el punto $P = (1, 1, -2)$.

*b*) La ecuación (*) para $S$ define a $z$ como función implícita de $x$ y $y$. Calcule $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ y evalúe esta derivada en el punto $(1,1,-2)$ .

5. [20 % ] Sea $\overrightarrow{r}(t) = (t, \frac{2\sqrt{2}}{3}t^{3/2}, \frac{1}{2}t^2)$ una parametrización de una curva.

   *a*) Halle $\overrightarrow{v}$, $\|\overrightarrow{v}\|$ y $\overrightarrow{a}$.

   *b*) Halle las componentes $a_T$ y $a_N$.

   *c*) Halle la longitud de la curva entre $\overrightarrow{r}(0)$ y $\overrightarrow{r}(1)$.

   *d*) Halle $k(t)$.

6. [10 % ] Suponga que $\overrightarrow{B(t)} = \overrightarrow{T(t)} \times \overrightarrow{N(t)}$. Muestre que $\dfrac{d\overrightarrow{B}}{dt}$ es perpendicular a $\overrightarrow{B}$ y a $\overrightarrow{T(t)}$ y colineal con $\overrightarrow{N(t)}$.

**EXAMEN PARCIAL DE CALCULO III(OCT)**

1. (24*pts*) Una partícula tiene vector posición $\overrightarrow{r(t)} = (\cos t, \sqrt{2}\text{sen } t, \cos t)$ $0 \leq t \leq 2\pi$.

   *a*) Halle $\overrightarrow{v}(t)$, $\overrightarrow{a}(t)$, $\overrightarrow{T(t)}$, $\overrightarrow{N(t)}$, $a_T$, $a_N$.

   *b*) Halle la ecuación vectorial de la recta tangente a la curva que pasa por el punto $P = (1,0,1)$.

   *c*) Halle la longitud de la curva desde el punto $\overrightarrow{r(0)}$ hasta $\overrightarrow{r(2\pi)}$.

2. (20*pts*)

   *a*) Si una partícula describe una curva en el espacio de tal manera que los vectores aceleración y velocidad cumplen que $\left\|\overrightarrow{v(t)}\right\| = 1$, $\|\overrightarrow{a}(t)\| = 1$ para todo $t$, halle la curvatura de la curva en cada instante $t$.

   *b*) Sea $\overrightarrow{B(t)} = \overrightarrow{T(t)} \times \overrightarrow{N(t)}$ el vector binormal. Muestre que $\dfrac{d\overrightarrow{B}}{dt} \cdot \overrightarrow{T} = 0$.

   *c*) Si $\overrightarrow{\alpha}(t) = \overrightarrow{r(t)} \times \overrightarrow{v(t)}$ muestre que $\overrightarrow{\alpha}'(t) = \overrightarrow{r(t)} \times \overrightarrow{a(t)}$ .

   *d*) Trace una curva cualquiera y escoja un punto sobre esa curva. Trace los vectores $\overrightarrow{T(t)}, \overrightarrow{N(t)}$ y el vector aceleración $\overrightarrow{a(t)}$, sabiendo que la componente tangencial es negativa.

3. (30*pts*) Dada la función $f(x,y,z) = 2x^2 + y^2 - z$

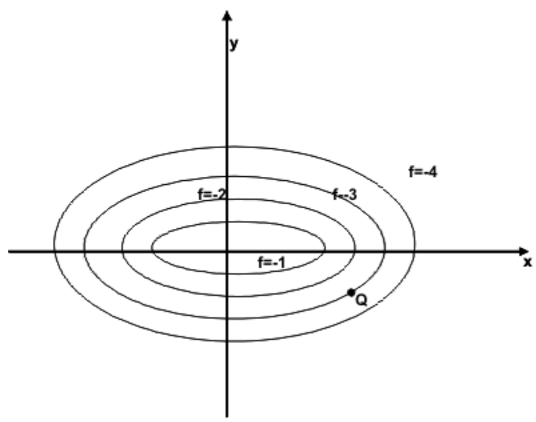
*a*) Encuentre la dirección en la cual $f(x, y, z)$ crece más rápidamente y la máxima razón de cambio de $f(x, y, z)$ en el punto $P(1, 0, 2)$

*b*) ¿Para que valor de $c$ la superficie de nivel $L_f(c)$, pasa por el punto $(1, 0, 2)$?

*c*) Muestre que la recta cuyas ecuaciones paramétricas son: $x = -1+t$, $y = t$, $z = 2 + 4t$, es tangente a la superficie $L_f(c)$. Encuentre la ecuación del plano tangente a la superficie de nivel $L_f(c)$ en $P = (1, 0, 2)$.

4. (16*pts*) Sea $z = f(\ r \operatorname{sen}\theta, r\cos\theta)$ halle $\dfrac{\partial z}{\partial \theta}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial r \partial \theta}$.

5. (10*pts*) Algunas curvas de nivel de una función $z = f(x, y)$ se muestran en la siguiente figura




*a*) Halle $f(Q)$.

*b*) Halle los signos de $f'(Q, \mathbf{i})$ y $f'(Q; \mathbf{j})$. (Explique)

*c*) Dibuje la dirección de máximo crecimiento de $f$ en el punto $Q$.

**EXAMEN PARCIAL DE CALCULO III (OCT)**
**PRIMERA PARTE (20 %)**

1. Decida cuáles de los siguientes enunciados son Falsos o Verdaderos. Justifique su respuesta:

i) La curva $y = x^2$ tiene su curvatura máxima en el punto $(0, 0)$.

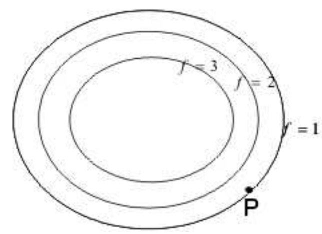
ii) La función $\dfrac{x^2}{x^2+y^4}$; $(x,y) \neq (0,0)$, $0$ si $(x,y) = (0,0)$ es continua en el origen.

iii) La derivada direccional de la función $f(x,y) = 2x^2y^3 + 6xy$ en $(1,1)$ y en la dirección del vector $(3,5)$ es 4

IV) Un vector normal a la gráfica de $z = f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ en el punto donde $x = 1$, $y = \sqrt{3}$ es dado por $\frac{1}{2}\left(2, 2\sqrt{3}\right)$.

**SEGUNDA PARTE (30 %)**

10 % 2. La figura muestra algunas curvas de nivel de $z = f(x,y)$. Los valores de $f$ sobre estas curvas están marcados. Señale la dirección del gradiente en el punto $P$ y decida el signo de $\nabla f(P) \cdot \mathbf{i}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}(P)$




20 % 3. Considere la función $z = f(x,y) = x^2 + (y-1)^2$

i) Bosqueje la curva de nivel de $f$ que pasa por el punto $(2,2)$ y señale el gradiente tomado desde el punto.

ii) Halle la derivada direccional de $f$ en el punto $(2,2)$ y en la dirección hacia $(-1,6)$.

iv) Si $x = \dfrac{u}{r}$, $y = uv$. Halle $\dfrac{\partial z}{\partial u}$.

v) Halle la ecuación del plano tangente a la gráfica de $f$ en el punto $(2,2,\ f(2,2))$.

# Capítulo 3

# Integrales Dobles y Triples

## 3.1. Objetivos

1. Entender el teorema de Fubini para integrales de funciones de varias variables.
2. Establecer la integral iterada ( en un sistema de coordenadas dado) igual a una integral doble de una función de dos variables en un dominio del plano dado.
3. Evaluar integrales iteradas.
4. Establecer integrales dobles para calcular el área de una región plana.
5. Establecer integrales dobles o triples para calcular el volumen de una región dada del espacio.
6. Dar la interpretación del elemento de área cuando se hace un cambio de variable en el plano.
7. Dar una interpretación del elemento de volumen cuando se hace un cambio de variable en el espacio (como coordenadas cilíndricas, esféricas, etc.)
8. Establecer integrales iteradas en algún sistema de coordenadas como las cartesianas, polares de una integral doble sobre una región dada.
9. Establecer integrales iteradas en algún sistema de coordenadas como las cartesianas, cilíndricas, esféricas de una integral triple sobre una región dada.
10. Utilizar integrales dobles para el cálculo de la masa, centro de masa de una masa.

11. Utilizar integrales triples para el cálculo de la masa, centro de masa y momento de inercia respecto a una recta $L$ de un sólido.

## 3.2. Trabajo en clase

1. Escriba la definición de $\displaystyle\int_{\Omega}\int f(x,y)dA:\ \Omega=[a,\ b]\times[c,\ d]$.

   ¿Cómo se interpreta $\displaystyle\int_{\Omega}\int f(x,y)dA \quad f(x,y)\geq 0$.

2. ¿Cómo define $\displaystyle\int_{\Omega}\int f(x,y)dA$ si $\Omega$ no es un rectángulo? Explique las regiones de tipo I, $\Omega$. En este caso cómo halla $\displaystyle\int_{\Omega}\int f(x,y)dA$? Explique las regiones de tipo II. ¿Cómo halla $\displaystyle\int_{\Omega}\int f(x,y)dA$ para este caso? Dé ejemplos.

3. Esbozar las regiones de integración de las siguientes funciones

$$a)\ \int_{-1}^{1}\int_{x}^{1} xydydx \qquad b)\ \int_{0}^{\pi/4}\int_{x}^{\sec\theta} r\cos\theta drd\theta$$

$$b)\ \int_{-1}^{1}\int_{2+y}^{1}\left(x^2+y^2\right)dxdy \qquad d)\ \int_{1}^{2}\int_{x}^{\sqrt{4-x^2}}\left(x^2+y\right)dydx$$

4. Muestre que $\displaystyle\int_{0}^{x}\left(\int_{0}^{s} f(t)dt\right)dx=\int_{0}^{x}(x-s)f(s)ds$.

   a) Evalúe la integral iterada $\int_1^3\int_0^2 yx^2dxdy$
   b) Evalúe la integral iterada $\int_4^5\int_0^x e^{x+y}dydx$.
   c) Sea $S$ la región acotada por las rectas $y=2x$, $x=1$, $x=4$. Exprese la integra $\displaystyle\iint_S(x+y)dA$ como una integral iterada. (con respecto a $y$ primero y luego con respecto a $x$).
   d) Exprese la integral $\displaystyle\iint_S(x^3+y)dA$ como una integral iterada bajo la región S la cual es acotada por las gráficas $y=1+x^2$ y $y=9-x^2$.

5. ¿Cómo cambiamos de coordenadas rectangulares a coordenadas polares en una integral doble? Dé ejemplos.

6. La integral iterada $\int\limits_{-4}^{4}\int\limits_{\sqrt{4^2-x^2}}^{\sqrt{4^2-x^2}} 5dydx$ representa el volumen de una región sólida. Haga un bosquejo de la región de integración y calcule su integral en coordenadas polares.

7. Si una lámina ocupa una región plana $\Omega$ y tiene una función densidad $p(x, y)$. Escriba las fórmulas en términos de integrales dobles de:

   a) la masa, b) los momentos alrededor de los ejes, c) El centro de masa, d) los momentos de inercia alrededor de los ejes y el origen (lo mismo para integrales triples

   *a*) Si tenemos $x = x(u, v)$, $y = y(u,\ v)$ de la transformación $T$. ¿Cuál es el Jacobiano de $T$?

   *b*) ¿Cómo se cambia de variable en una integral doble?

8. Escriba la fórmula para el área de una superficie $S$ para los casos siguientes:

   *a*) $S$ es parametrizada por la función vectorial $\overrightarrow{r}(u, v), (u,\ v) \in \Omega$.

   *b*) $S$ tiene ecuación $z = f(x, y)$, $(x, y) \in \Omega$.

   *c*) $S$ es la superficie de revolución obtenida al girar la curva $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$ alrededor del eje $x$.

9. Determine el Jacobiano de las siguientes transformaciones

   *a*) $x = u + 3v$, $y = 2u - 5v$. (b) $x = se^t$, $y = se^{-t}$

10. Calcule $\int\int\limits_R \cos(\frac{y-x}{y+x})dA$ donde $R$ es la región trapezoidal con vértices en $(1, 0)$, $(2, 0)$, $(0, 2)$ y $(0, 1)$.

11. Sea $f(x, y) = 2$, $\Omega_* = [0, 1] \times [0, 1]$ en el plano $u - v$ y sea $\overrightarrow{r(u, v)} = \left(\frac{u}{2} + \frac{v}{2}, \frac{v}{2} - \frac{u}{2}\right)$. Halle la región $\Omega$ tal que $\Omega_* = \overrightarrow{r}(\Omega)$. Pruebe que $\int\int\limits_{\Omega} f(x, y)dxdy \neq \int\int\limits_{\Omega*} f(x(u, v), y(u, v))dudv$. ¿Cuándo estas integrales serán iguales?

12. Use coordenadas polares para evaluar $\int_0^{\sqrt{2}}\int_y^{\sqrt{4-y^2}} \frac{1}{1+x^2+y^2}dxdy$.

13. Responda las siguientes preguntas.

    *a*) Escriba la definición de la integral triple sobre una caja rectangular $V$.

*b*) ¿Cómo evalúa $\int_V\int\int f(x,y,z)dV$?

*c*) ¿Qué una región sólida de tipo I?

¿Cómo evalúa $\int_V\int\int f(x,y,z)dV$ para este tipo de regiones?

¿Qué otros tipos hay?

*d*) Evalúe la integral iterada $\int_0^1\int_1^{2z}\int_0^y(x-yz)dxdydz$.

*e*) Encuentre los límites para la integral $\iiint\limits_V e^z dV$ donde $V$ es el sólido limitado por los planos $x+y+z=4$, $y=x$, $x=1$, $x=2$, $z=0$, $y=0$.

*f*) ¿Cómo cambiamos de coordenadas rectangulares a coordenadas cilíndricas en una integral triple?

*g*) ¿Cómo cambiamos de coordenadas rectangulares a coordenadas esféricas en una integral triple?

*h*) ¿En qué situaciones cambiamos de coordenadas cilíndricas a esféricas?

*i*) Si tenemos $x=x(u,v)$, $y=y(u,\ v)$ de la transformación $T$. ¿Cuál es el Jacobiano de $T$?

*j*) ¿Cómo se cambia de variable en una integral doble?

*k*) ¿Cómo se cambia de variables en una integral triples?

14. Establezca en coordenadas cilíndricas la integral $\int\int\int\limits_V(x^2+y^2)dV$ donde la región de integración es el solido limitado lateralmente por el cilindro $x^2+y^2=1$, arriba por el plano $xy$, y abajo por el paraboloide $z=4x^2+4y^2$. (NO EVALÚE LA INTEGRAL).

15. Considere la integral $\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int\limits_{0}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} z\sqrt{x^2+y^2+z^2}dzdydx$. Haga un bosquejo de la región de integración y exprese la integral en coordenadas esféricas. Evalúe la integral.

16. Exprese el volumen del sólido entre las esferas $x^2+y^2+z^2=4$ y $x^2+y^2+z^2=1$ y dentro del cono $z=\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{x^2+y^2}$, usando

    *a*) Coordenadas cartesianas.

    *b*) Coordenadas cilíndricas.

    *c*) Coordenadas esféricas.

17. Considere la integral $I = \int\limits_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \int\limits_{-\sqrt{3-x^2}}^{\sqrt{3-x^2}} \int\limits_{3x^2+3y^2}^{3} \sqrt{x^2+y^2}\,dzdydx$

    a) Haga un bosquejo del sólido $\Omega$.

    b) Exprese la integral en coordenadas cilíndricas.

    c) Exprese la integral en coordenadas esféricas.

    d) Calcule $I$

18. Transforme la siguiente integral a coordenadas cartesianas y a coordenadas esféricas $\int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\sqrt{2}} \int\limits_r^{\sqrt{4-r^2}} r^3 z\,dzdrd\theta$

## 3.3. Problemas resueltos

1. Calcular el volumen del sólido limitado por la esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

**Solución**. El sólido está comprendido entre las gráficas de $z = f(x, y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ y $z = g(x, y) = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$. La región $S = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq R^2\}$.

$$\begin{aligned} Vol &= V = \int\int_S [f(x,y) - g(x,y)]dxdy = 2\int\int_S f(x,y)dxdy \\ &= 8\int_0^R [\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}dy]dx \end{aligned}$$

Hagamos $A = \sqrt{R^2 - x^2}$ o sea $A^2 = R^2 - x^2$ por lo tanto $\sqrt{R^2 - x^2 - y^2} = \sqrt{A^2 - y^2} = A\sqrt{1 - (\frac{y}{A})^2}$. Si hacemos el cambio de variable $y = A \operatorname{sen} \theta$ obteniendo $dy = A \cos \theta d\theta$ tenemos

$$
\begin{aligned}
Vol(V) &= 2\int\int_S f(x,y)dxdy \\
&= 8\int_0^R \left[\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \sqrt{R^2-x^2-y^2}dy\right] dx \\
&= 8\int_0^R \left[\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \sqrt{A^2-y^2}dy\right] dx \\
&= 8\int_0^R \left[\int_0^{\pi/2} A^2\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\theta}\cos\theta d\theta\right] dx \\
&= 8\int_0^R [\int_0^{\pi/2} A^2\cos^2\theta d\theta]dx \\
&= 8\int\limits_0^R A^2 \int\limits_0^{\pi/2} \frac{1+\cos 2\theta}{2} = \frac{1}{2}\theta\Big|_0^{\pi/2} \quad dx \\
&= 8\int_0^R \frac{\pi}{4}A^2dx = 8\frac{\pi}{4}\int_0^R (R^2-x^2)dx \\
&= 2\pi\ (R^2x - \frac{x^3}{3})\Big|_0^R = 2\pi(R^3 - \frac{R^3}{3}) \\
&= 2\pi\frac{2}{3}R^3 = \frac{4}{3}\pi R^3.
\end{aligned}
$$

2. Hallemos el volumen del sólido limitado por el elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

**Solución**. El sólido está comprendido entre las gráficas de $z = f(x,y) = c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$ y $z = g(x,y) = -c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$. La región $S = \left\{(x,y) : \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \leq 1\right\}$. Hagamos $A = \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$ o sea $A^2 = 1-\frac{x^2}{a^2}$ por lo tanto $\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}} = \sqrt{A^2-\frac{y^2}{b^2}} = A\sqrt{1-(\frac{y}{Ab})^2}$. Si hacemos el cambio de variable $y = Ab\operatorname{sen}\theta$ $dy = Ab\cos\theta d\theta$, tenemos

$$
\begin{aligned}
Vol(V) &= 2\int\int_S f(x,y)dxdy \\
&= 8c\int_0^a\left[\int_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}dy}\right]dx \\
&= 8c\int_0^a\left[\int_0^{bA}\sqrt{A^2-\frac{y^2}{b^2}dy}\right]dx \\
&= 8\int_0^a\left[\int_0^{\pi/2}A^2b\sqrt{1-\text{sen}^2\theta}\cos\theta d\theta\right]dx \\
&= 8c\int_0^a\left[A^2b\int_0^{\pi/2}\cos^2\theta d\theta\right]dx \\
&= 8bc\int_0^a A^2\int\limits_0^{\pi/2}\frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta \\
&= 8bc\int_0^a A^2\frac{1}{2}\theta|_0^{\pi/2}dx \\
&= 8bc\int_0^a\frac{\pi}{4}A^2dx = 8bc\frac{\pi}{4}\int_0^a(1-\frac{x^2}{a^2})dx \\
&= 2\pi bc\,(x-\frac{x^3}{3a^2})\Big|_0^a = 2\pi bc(a-\frac{a^3}{3a^2}) \\
&= 2\pi bc\frac{2}{3}a = \frac{4}{3}\pi abc
\end{aligned}
$$

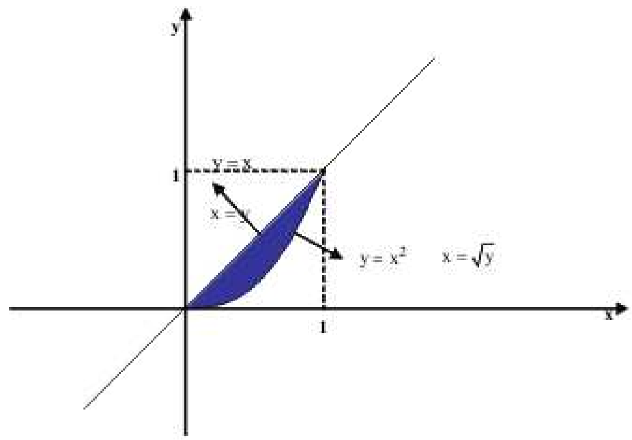
Observemos que en el caso de que $a = b = c$ tenemos el resultado del ejemplo 1.

3. Considere la integral

$$\int_0^1[\int_{x^2}^x f(x,y)dy]dx$$

Bosqueje la región de integración, y cambie el orden de integración.
**solución**. La región de integración está dada por

$$S = (x,y) : 0 \leq x \leq 1,\ x^2 \leq y \leq x$$




Así, intercambiando el orden de integración tenemos

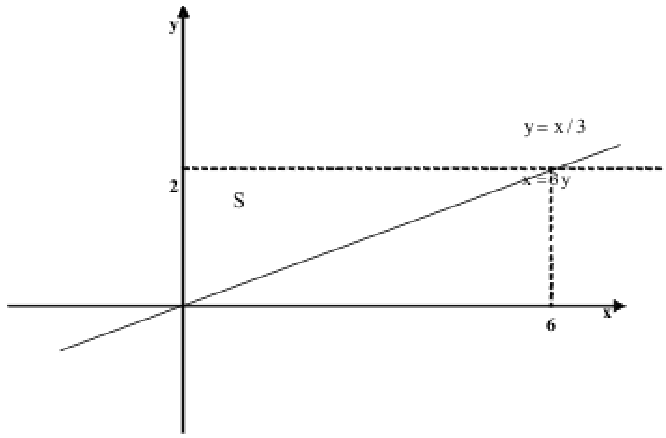
$$\int_0^1 [\int_{x^2}^{x} f(x,y)dy]dx = \int_0^1 [\int_{y}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx]dy$$

4. Evaluar la integral

$$\int_0^6 [\int_{x/3}^{2} x\sqrt{y^3+1}dy]dx.$$

La región de integración es $S = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 6,\ x/3 \leq y \leq 2\}$.
**Solución**. Observemos que la integral $\sqrt{y^3+1}$ no tiene antiderivada elemental. No la podemos calcular exactamente. Veamos que ocurre si invertimos el orden de integración. S lo podemos expresar también en la forma

$$S = \{(x,y) : 0 \leq y \leq 2,\ 0 \leq x \leq 3y\}$$




Así la integral la podemos expresar como

$$
\begin{aligned}
\int_0^6 [\int_{x/3}^2 x\sqrt{y^3+1}dy]dx &= \int_0^2 [\int_0^{3y} x\sqrt{y^3+1}dx]dy \\
&= \int_0^2 \sqrt{y^3+1}[\int_0^{3y} xdx]dy \\
&= \int_0^2 \sqrt{y^3+1}[\frac{x^2}{2}|_0^{3y}]dy \\
&= \int_0^2 \frac{9}{2}y^2\sqrt{y^3+1}dy \\
&= (y^3+1)^{3/2}\Big|_0^2 = 26
\end{aligned}
$$

5. Calcular

$$\int\int_S \sqrt{a^2-x^2-y^2}dxdy$$

donde $S = \left\{(x,y); 0 \le x \le a,\ 0 \le y \le \sqrt{a^2-x^2}\right\}.$

**Solución.** Cambiando a coordenadas polares, tenemos

$$
\begin{aligned}
\int\int_T \sqrt{a^2-r^2}rdrd\theta &= \int_0^a [\int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2-r^2}rd\theta]dr \\
&= \pi/2\int_0^a r\sqrt{a^2-r^2}dr \\
&= \pi/2\ \frac{-(a^2-r^2)^{3/2}}{3}\Big|_0^a \\
&= \pi/6a^3
\end{aligned}
$$

Si multiplicamos este resultado por 8 obtenemos el volumen de la bola igual a $4/3\pi a^3$.

6. Hallar el volumen de la parte del cono $z = \sqrt{x^2+y^2}$ intersectada por la esfera $x^2+y^2+z^2 = a^2$.
   **Solución.** Haciendo el cambio a coordenadas esféricas, tenemos:
   $$Vol = \int\int\int_V dxdydz = \int\int\int_T \rho^2 \operatorname{sen}\phi d\rho d\theta d\phi$$
   donde $T = \{(\rho,\theta,\phi) : 0 \leq \rho \leq a,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi,\ 0 \leq \phi \leq \pi/4\}$.
   $$Vol \quad = \quad \int_0^{2\pi}\int_0^a\int_0^{\pi/4} \rho^2 \operatorname{sen}\phi d\phi d\rho d\theta = \frac{2-\sqrt{2}}{3}\pi a^3.$$

7. Calcule la integral
   $$\int\int\int_V (x^2+y^2)dxdydz$$
   donde $V$ es el volumen limitado por la semiesfera $x^2+y^2+z^2 = 4,\ z \geq 0$ y cortada por el cilindro $x^2+y^2 = 1$.

   **Solución**: Utilizando coordenadas cilíndricas tenemos que este volumen puede verse como
   $$T \quad = \quad \{(r,\theta,z) : 0 \leq r \leq 1,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi,\ 0 \leq z \leq \sqrt{4-r^2}\}$$
   Por lo tanto la integral está dada por
   $$\begin{aligned}\int\int\int_V (x^2+y^2)dxdydz &= \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^{\sqrt{4-r^2}} r^2 r dz dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^{\sqrt{4-r^2}} r^3 dz dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}[\int_0^1 r^3\sqrt{4-r^2}dr]d\theta \\ &= 2\pi(\frac{64}{15} - \frac{11\sqrt{3}}{5}).\end{aligned}$$

8. Exprese el volumen del sólido entre las esferas $x^2+y^2+z^2 = 4$ y $x^2+y^2+z^2 = 1$ y dentro del cono $z = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{x^2+y^2}$, usando

   *a*) Coordenadas cartesianas

   *b*) Coordenadas cilíndricas.

*c*) Coordenadas esféricas.

*d*) Calcule la integral en el sistema que usted considere más apropiado.

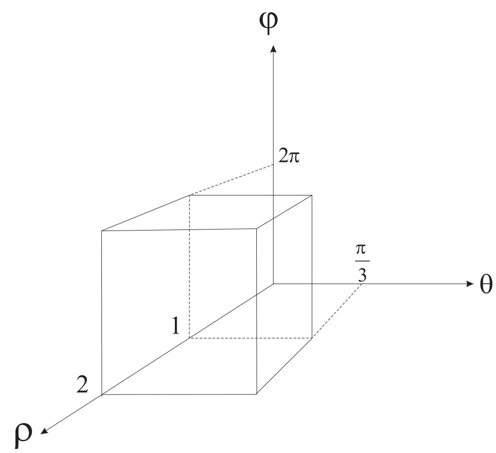
**Solución**: En coordenadas cartesianas hallamos los cortes de las esferas con el cono. La intersección con la esfera de radio 1, es $x^2 + y^2 + \frac{1}{3}(x^2 + y^2) = 1$, entonces $x^2 + y^2 = 3/4$. La intersección con la esfera de radio 2 es dada por $x^2 + y^2 = 3$. Así tenemos que

$$\begin{aligned} Vol &= \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \int_{-\sqrt{3-x^2}}^{\sqrt{3-x^2}} \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} dzdydx \\ &- \int_{-\sqrt{3}/2}^{\sqrt{3}/2} \int_{-\sqrt{3/4-x^2}}^{\sqrt{3/4-x^2}} \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dzdydx \end{aligned}$$

En coordenadas cilíndricas consideraremos la integral anterior y le hacemos el cambio de coordenadas. Así para la primera integral tenemos $0 \leq r \leq \sqrt{3}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $\frac{1}{\sqrt{3}}r \leq z \leq \sqrt{4 - r^2}$ y para la segunda integral tenemos $0 \leq r \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $\frac{1}{\sqrt{3}}r \leq z \leq \sqrt{1 - r^2}$. Así el volumen en coordenadas cilíndricas es dado por

$$Vol = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{3}} \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}r}^{\sqrt{4-r^2}} rdzdrd\theta - \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{3}/2} \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}r}^{\sqrt{1-r^2}} rdzdrd\theta.$$

Para hallar el volumen en coordenadas esféricas consideremos un corte del sólido en el plano $xz$. en este caso, en el plano $xz$, $y = 0$ por lo tanto si $x \geq 0$, tenemos $z = \frac{1}{\sqrt{3}}x$, donde $\varphi = \pi/2 - \tan^{-1}(1/\sqrt{3}) = \pi/3$. Así en coordenadas esféricas tenemos $1 \leq \rho \leq 2, 0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq \varphi \leq \pi/3$




Así el volumen en coordenadas esféricas es dado por

$$Vol = \int_0^{2\pi}\int_1^{2}\int_0^{\pi/3} \rho^2 sen\ \varphi d\varphi d\rho d\theta.$$

Como puede observarse el cálculo más sencillo es en coordenadas esféricas, por lo tanto

$$Vol = \int_0^{2\pi}\int_1^{2}\int_0^{\pi/3} \rho^2 sen\ \varphi d\varphi d\rho d\theta. = 2\pi \left.\frac{\rho^4}{4}\right|_1^2 \int_0^{\pi/3} sen\ \varphi d\varphi =$$

$$= 2\pi(4 - 1/4)\left.(-\cos\varphi)\right|_0^{\pi/3} = 15\pi/4$$

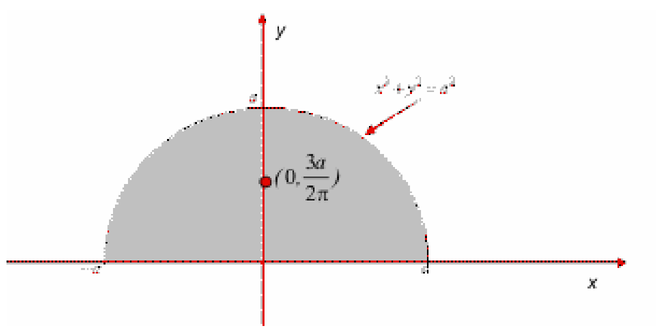
9. Suponga que la densidad de una lámina semicircular es proporcional a la distancia desde el centro del círculo. Determine el centro de masa de la lámina.
   **Solución**. Si consideramos la lámina como la mitad de círculo $x^2 + y^2 \leq a^2$, l a distancia desde un punto $(x, y)$ del círculo al origen está dada por $\sqrt{x^2 + y^2}$. Por lo tanto la densidad está dada por $\rho(x, y) = K\sqrt{x^2 + y^2}$, donde $K$ es una constante de proporcionalidad. Así, la masa está dada por
   $$m = \int\int_S K\sqrt{x^2 + y^2}dxdy.$$
   Para calcular esta integral hacemos un cambio de variable a coordenadas polares. En este caso la región estaría dada por $0 \leq r \leq a$ y $0 \leq \theta \leq \pi$, y

esta integral sería

$$m = \int\int_S K\sqrt{x^2+y^2}dxdy = K\int_0^{\pi}\int_0^{a} r\ rdrd\theta$$
$$= K\int_0^{\pi} d\theta \int_0^{a} r^2 dr = K\pi\ \frac{r^3}{3}\Big|_0^a = \frac{K\pi a^3}{3}.$$

Puesto que la lámina y la función de densidad es simétrica respecto al eje y, el centro de masa está sobre el eje $y$, esto es $\overline{x} = 0$. Puesto que

$$\overline{y} = \frac{1}{m}\int\int_S y\rho(x,y)dxdy = \frac{3}{K\pi a^3}\int\int_S yK\sqrt{x^2+y^2}dxdy$$
$$= \frac{3}{\pi a^3}\int\int_S y\sqrt{x^2+y^2}dxdy = \frac{3}{\pi a^3}\int_0^{\pi}\int_0^{a} r\operatorname{sen}\theta\ r\ rdrd\theta$$
$$= \frac{3}{\pi a^3}\int_0^{\pi}\operatorname{sen}\theta d\theta\int_0^{a} r^3dr = \frac{3}{\pi a^3}\ -\cos\theta|_0^{\pi}\ \frac{r^4}{4}\Big|_0^a = \frac{3a}{2\pi}.$$




10. Determine los momentos de inercia de $I_x$, $I_y$, $I_o$ de un disco $D$ con centro en el origen y frontera $x^2+y^2=a^2$ homogéneo con densidad $\rho(x,y)=\rho$ constante

**Solución**. Puesto que

$$I_o = \int\int_D (x^2+y^2)\rho(x,y)dxdy = \rho\int\int_D (x^2+y^2)dxdy$$
$$= \rho\int_0^{2\pi}\int_0^{a} r^2\ rdrd\theta = \rho\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{a} r^3dr = 2\pi\rho\frac{a^4}{4} = \frac{\pi\rho a^4}{2}.$$

Debido a la simetría del problema $I_x = I_y$ y esto nos permite calcular $I_x$ y $I_y$, puesto que $I_o = I_x + I_y$. Por lo tanto

$$I_x = l_y = \frac{I_o}{2} = \frac{\pi \rho a^4}{4}$$

Puesto que $I_o = \dfrac{\pi \rho a^4}{2}$ y la masa del disco es $m = \rho\left(\pi a^2\right)$, entonces $I_o = \frac{1}{2} m a^2$. Por lo tanto si incrementamos la masa o el radio, aumentamos el momento de inercia. El momento de inercia de una rueda es lo que dificulta comenzar el movimiento de un automóvil o detenerlo.

## 3.4. Exámenes cortos realizados

**QUIZ 1**
1. Para cada una de las siguientes integrales

$$(a) \quad \int_0^1 \int_{x^{1/3}}^1 \sqrt{1 - y^4}\,dydx$$

$$(b) \iint_{x^2+y^2 \leq 4} \ln(x^2 + y^2)dxdy$$

dibuje la región de integración y calcule la integral.
2. Calcule el volumen del sólido que yace debajo del cono $z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$ y arriba por el plano $xy$.

**QUIZ 2**

1. Establezca en coordenadas cilíndricas la integral $\iiint_V x^2 dV$ donde la región de integración es el solido limitado lateralmente por el cilindro $x^2 + y^2 = 1$, arriba por el plano $xy$, y abajo por el cono $z^2 = 4x^2 + 4y^2$. (NO EVALÚE LA INTEGRAL).

2. Considere la integral $\int_{-3}^{3} \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} \int_0^{\sqrt{9-x^2-y^2}} z\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}dzdydx$. Haga un bosquejo de la región de integración y exprese la integral en coordenadas esféricas. Evalúe la integral.

**QUIZ 3**
1. Determine los momentos de inercia $I_x, I_y$, y $I_o$ de un disco homogéneo $\Omega$ con densidad $\rho(x, y) = \rho$ (constante), con centro en el origen y radio $a$.

2. Considere la integral

$$\int_{0}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} z\,dz\,dy\,dx$$

(a) Establezca la integral en coordenadas esféricas. (NO RESUELVA LA INTEGRAL).
(b) Calcule la integral en coordenadas cilíndricas.

**QUIZ 4**
Exprese la integral $\int\int\int_{\Omega}\left(x^2+y^2+z^2\right)dV$, en coordenadas cartesianas, cilíndricas y esféricas donde $\Omega$ es la región acotada por la esfera $x^2+y^2+z^2=4$, dentro del cono $z=\sqrt{x^2+y^2}$. Calcule la integral en el sistema de coordenadas que usted considere más conveniente.

**QUIZ 5**
Seleccione la respuesta correcta

1. Al invertir el orden de integración de la integral $\int_0^1\int_0^x f(x,y)dxdy + \int_1^2\int_0^{2-x} f(x,y)dxdy$, obtenemos

   *a)* $\int_0^x\int_0^1 f(x,y)dxdy + \int_0^{2-x}\int_1^2 f(x,y)dxdy$

   *b)* $\int_0^1\int_y^{2-y} f(x,y)dydx$

   *c)* $\int_0^1\int_y^{2-y} f(x,y)dxdy$

   *d)* $\int_y^{y-2}\int_1^2 f(x,y)dydx$

2. Sea $x=uv$, $y=u^2-v^2$ $u>0$, $v>0$. Al hacer el cambio de variable y transformar la región $T=[0,1]\times[0,1]$ en el plano $uv$, por la región $\Omega$ en el plano $xy$ acotada por las gráficas de las funciones $y=1-x^2$ y $y=x^2-1$, la integral $\int\int_\Omega f(x,y)dxdy$ se convierte en

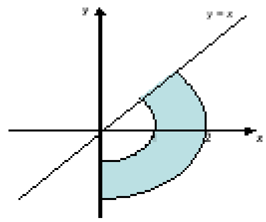
   *a)* $\int_0^1\int_0^1 f\left(uv,u^2-v^2\right)dudv$

   *b)* $\int_0^1\int_0^1 2f\left(uv,u^2-v^2\right)uvdudv$

   *c)* $\int_0^1\int_0^1 2f\left(uv,u^2-v^2\right)\left(u^2+v^2\right)dudv$

   *d)* $\int_0^1\int_0^1 -2f\left(uv,u^2-v^2\right)\left(u^2+v^2\right)dudv$

3. [i.] Al representar la integral $\int\int_{\Omega} \left(x^2+y^2\right) dA$ en coordenadas polares en la región

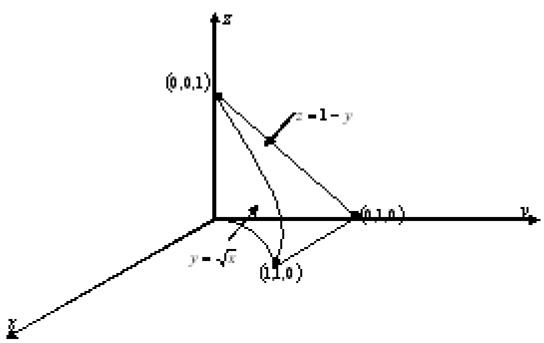



$$\begin{array}{ll} A. \ \int_1^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/4} r^2 d\theta dr & B. \ \int_1^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/4} r^2 dr d\theta \\ C. \ \int_1^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/4} r^3 d\theta dr & D. \ \int_1^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/4} r^3 dr d\theta \end{array}.$$

[ii.] Al invertir el orden de integración, tenemos que la integral $\int_0^1 \int_y^1 e^{x^2} dxdy$ es igual a

$$\begin{array}{ll} A. \ \int_y^1 \int_0^1 e^{x^2} dydx & B. \ \int_0^1 \int_x^1 e^{x^2} dydx \\ C. \ \int_0^1 \int_1^x e^{x^2} dydx & D. \ \int_0^1 \int_0^x e^{x^2} dydx \end{array}$$

[iii.] Dos de estas afirmaciones son correctas; señálelas. El volumen del solido que se muestra en la figura es




$$\begin{array}{ll} A. \ \int_0^1 \int_0^{\sqrt{x}} (1-y) dydx & B. \ \int_0^1 \int_1^{\sqrt{x}} (1-y) dxdy \\ C. \ \int_0^1 \int_0^{\sqrt{x}} \int_0^{1-y} dxdydz & D. \ \int_0^1 \int_0^{\sqrt{x}} \int_0^{1-y} dzdydx \end{array}$$

[iv.] El volumen del sólido bajo el paraboloide $z = 3(x^2+y^2)$, arriba del plano $xy$ y dentro del cilindro $x^2+y^2 = 4$ es

$A.\ \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_0^{r^2} dzdrd\theta$ $\qquad B.\ \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_0^{3r^2} dzdrd\theta$

$C.\ \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_0^{3r^2} rdzdrd\theta$ $\qquad D.\ \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_{3r^2}^{3/4} rdzdrd\theta$

[v.] Sea $x = \dfrac{u}{v}$, $y = uv$ $u > 0$, $v > 0$. Al hacer el cambio de variable y transformar la región $T$ en el plano $uv$, por la región $\Omega$ en el plano $xy$, integral $\int\int_\Omega f(x,y)dxdy$ se convierte en

$A.\ \int\int_T f\left(\dfrac{u}{v}, uv\right) dudv$ $\qquad B.\ -2\int\int_T f\left(\dfrac{u}{v}, uv\right)\dfrac{u}{v}dudv$

$C.\ 2\int\int_T f\left(\dfrac{u}{v}, uv\right)\dfrac{u}{v}dudv$ $\qquad D.\ \int\int_T f\left(\dfrac{u}{v}, uv\right)\dfrac{u}{v}dudv$