UNIVERSIDAD DEL VALLE
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

NOTAS DE CLASE Y GUÍA DE ESTUDIO
CÁLCULO II

Profesor

JOSÉ R. QUINTERO HENÁO

Prologo

Estas notas de clase y guía de estudio para el curso genérico de Cálculo II (111051 M) tienen como objetivo direccionar y apoyar el trabajo en el curso, con el fin fundamental de que los estudiantes tengan un mejor aprovechamiento de los contenidos y temas presentados.

El contenido de este material es básico en el desarrollo del curso genérico de Cálculo II. En estas notas se han incluido diversos ejemplos en cada sección, los cuales ilustran explícitamente el nivel y profundidad del curso. Adicionalmente, se han incluido ejercicios varios en cada sección, así como una evaluación típica en cada uno de los capítulos.

Este material está dividido en tres grandes capítulos que cubren el curso de Cálculo II. El primer capítulo corresponde al desarrollo del concepto de *integral indefinida (o antiderivada, o primitiva)* y los distintos *métodos de integración*. El segundo capítulo está dedicado al concepto de *integral definida, el Teorema Fundamental del Cálculo y algunas aplicaciones de la integral definida (área, volúmenes, longitud de arco y áreas de superficies de revolución)*. El tercer capítulo está dedicado fundamentalmente a las *series numéricas y series de potencias*, complementado con el estudio de la regla de L'Hôpital (cálculo de límites) y las integrales impropias.

Especial agradecimiento al Profesor **Álvaro Garzón R**. (Universidad del Valle) por sus aportes para mejorar la presentación de algunos temas y al Profesor **Gilberto Arenas D**. (Universidad Industrial de Santander) por la elaboración de las gráficas en esta versión de las notas.

José R. Quintero

Contenido

Capítulo 1

La integral indefinida

En esta sección nos proponemos definir un procedimiento inverso al proceso de derivación estudiado en el Curso de Cálculo I, denominado **Antiderivada o integración**.

En primer lugar, recordemos que el proceso de derivación consiste en asignar a una función dada f una nueva función denominada su derivada y denotada f', a través del límite del cociente de Newton. De la definición de la derivada, la correspondencia que asigna a f su derivada f' está bien definida en el sentido en que f' es determinada de forma única por la función f.

Para ilustrar este proceso inverso a la derivación consideremos primero un ejemplo sencillo. Sea g la función definida como $g(x) = x^3 + 3e^{-2x}$. Observemos que $g(0) = 3$ y que la derivada de la función g viene dada por

$$g'(x) = 3x^2 - 6e^{-2x} = f(x).$$

Consideremos ahora el problema "inverso" asociado con la derivación. Es decir, dada la función $f(x) = 3x^2 - 6e^{-2x}$, estamos interesados en verificar la existencia de una función diferenciable g que satisfaga la ecuación "diferencial"

$$g'(x) = f(x).$$

Claramente en este caso sabemos que la función $g(x) = x^3 + 3e^{-2x}$ satisface la ecuación. Sin embargo, notemos que para cada constante $c \in \mathbb{R}$, la familia de funciones

$$g_c(x) = x^3 + 3e^{-2x} + c$$

es tal que $g_c'(x) = 3x^2 - 6e^{-2x}$. En otras palabras, para cada $c \in \mathbb{R}$, la función g_c también es solución de la ecuación "diferencial"

$$g'(x) = f(x).$$

Observemos que si estamos interesados en encontrar una solución de la ecuación

$$g'(x) = f(x) \quad \text{sujeta a la condición } g(0) = 3,$$

entonces es necesario escoger la constante c de tal forma que $g_c(0) = 3$. En este caso,

$$3 = g_c(0) = (0)^3 + 3e^{-2(0)} + c = 3 + c \quad \Leftrightarrow \quad c = 0.$$

Como sabíamos desde el principio, la solución del problema propuesto es la función

$$g_0(x) = g(x) = x^3 + 3e^{-2x} \quad (c = 0).$$

Consideremos ahora el problema de encontrar una función diferenciable g que satisfaga

$$\begin{cases} g'(t) & = 5t^4 + 10t, \\ g(1) & = 3. \end{cases}$$

Note que para cada $c \in \mathbb{R}$, la función $g_c(t) = t^5 + 5t^2 + c$ satisface la ecuación "diferencial"

$$g'(t) = 5t^4 + 10t.$$

Para resolver el problema, es necesario escoger c de tal forma que $g_c(1) = 3$. Es decir,

$$3 = g_c(1) = (1)^5 + 5(1)^2 + c = 1 + 5 + c \quad \Leftrightarrow \quad c = -3.$$

En otras palabras la solución de la ecuación "diferencial" $g'(t) = 5t^4 + 10t$, sujeta a la condición $g(1) = 3$ es

$$g_{-3}(t) = t^5 + 5t^2 - 3.$$

En general, dada una función arbitraria f definida en un intervalo abierto I, estamos interesados en resolver el problema de encontrar una función diferenciable g que satisfaga la ecuación

$$g'(x) = f(x), \qquad x \in I. \tag{1.1}$$

La ecuación (1.1) se denomina ecuación diferencial ordinaria de primer orden.

Como veremos en las aplicaciones, en algunos problemas de interés, la ecuación diferencial (1.1) viene junto con una condición inicial de la forma

$$g(x_0) = y_0,$$

lo que significa que la función g debe satisfacer la ecuación diferencial y además g debe tener el valor y_0 al ser evaluada en x_0. En este caso decimos que g satisface el **problema de valor inicial**

$$g'(x) = f(x), \quad x \in I, \quad \text{sujeta a la condición inicial } g(x_0) = y_0. \tag{1.2}$$

La importancia de estudiar problemas de valor inicial de la forma (1.2) aparecen de forma natural cuando comprendemos que algunas leyes naturales de tipo físico, químico o biológico, son descritas mediante ecuaciones diferenciales de primer orden. Con el fin de ilustrar lo anterior, vamos a considerar algunos modelos naturales de interés:

- Movimiento rectilíneo.
- Modelos de crecimiento/decrecimento (poblaciones, ley de enfriamiento de Newton).

Movimiento rectilíneo. Vamos a considerar una partícula que se mueve sujeta a una fuerza dada a lo largo de una línea recta con función posición $x(t)$. De nuestro curso de Física básica sabemos que la velocidad de la partícula $v(t)$ viene caracterizada como la variación de la función posición con respecto al tiempo. Es decir,

$$x'(t) = \frac{dx(t)}{dt} = v(t).$$

Más aún, la aceleración de la partícula $a(t)$ viene caracterizada como la variación de la función velocidad con respecto al tiempo. Esto es,

$$v'(t) = \frac{dv(t)}{dt} = a(t).$$

Ejemplo 1.1. La aceleración de una partícula que se mueve en un plano con movimiento rectilíneo está dada por $a(t) = 3t^3 + 2t^2 + t + 2$. Calcule las funciones velocidad $v(t)$ y posición $x(t)$, sabiendo que $v(0) = 3$ y $x(0) = 5$.

Solución. Recordemos que la razón de cambio de la función velocidad se denomina aceleración. Es decir

$$v'(t) = a(t) = 3t^3 + 2t^2 + t + 2.$$

Entonces podemos tomar como solución a la función

$$v(t) = \frac{3}{4}t^4 + \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + 2t + c.$$

Con el fin de satisfacer la condición $v(0) = 3$, tenemos que escoger apropiadamente la constante c. Para ello,

$$3 = v(0) = \frac{3}{4}(0)^4 + \frac{2}{3}(0)^3 + \frac{1}{2}(0)^2 + 2(0) + c = c.$$

Entonces concluimos que $c = 3$. Es decir, tendremos que la función velocidad es

$$v(t) = \frac{3}{4}t^4 + \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + 2t + 3.$$

Ahora, conociendo la función velocidad, la función posición $x(t)$ satisface

$$x'(t) = v(t), \quad \text{sujeta a la condición} \quad x(0) = 5.$$

Por lo tanto,

$$x(t) = \frac{3}{20}t^5 + \frac{1}{6}t^4 + \frac{1}{6}t^3 + t^2 + 3t + c.$$

Ahora escogemos c tal que $x(0) = 5$. Es decir,

$$5 = x(0) = \frac{3}{20}(0)^5 + \frac{1}{6}(0)^4 + \frac{1}{6}(0)^3 + (0)^2 + 3(0) + c = c.$$

De donde, $c = 5$. En conclusión, la función posición tiene la forma

$$x(t) = \frac{3}{20}t^5 + \frac{1}{6}t^4 + \frac{1}{6}t^3 + t^2 + 3t + 5.$$

Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado. En este caso, vamos a considerar un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado horizontal o vertical sujeto a una función aceleración constante. Es decir, cuando $a(t) = a_0$, para todo t. Para describir las ecuaciones que rigen el movimiento, vamos a suponer que la posición inicial $x(0)$ y la velocidad inicial $v(0)$ de la partícula en el instante $t = 0$ vienen dadas por

$$x(0) = x_0, \quad v(0) = v_0.$$

Iniciaremos encontrando la función velocidad $v(t)$. Es decir, vamos a resolver

$$v'(t) = a_0, \quad \text{sujeto a que} \quad v(0) = v_0.$$

De nuestro curso de Cálculo I sabemos que una función candidata a ser la velocidad es $f(t) = a_0 t$ pues su derivada $f'(t) = a_0$ es constante. Sin embargo, esta función no necesariamente satisface la condición $f(0) = v_0$. Como observamos en el primer ejemplo, para cualquier constante c, la función $v(t) = a_0 t + c$ también tiene derivada constante $v'(t) = a_0$. Para finalizar, debemos escoger c de tal forma que $v(0) = v_0$. Es decir,

$$v_0 = v(0) = a_0(0) + c = c,$$

y por lo tanto, la función velocidad viene dada como $v(t) = a_0 t + v_0$. Para encontrar $x(t)$ necesitamos resolver

$$x'(t) = v(t) = a_0 t + v_0, \quad \text{sujeto a que } x(0) = x_0.$$

Notemos que una función candidata a ser la función posición $x(t)$ es,

$$x(t) = \frac{a_0}{2}t^2 + v_0 t + c_1,$$

para cualquier constante c_1, pues su derivada es $x'(t) = a_0 t + v_0$. Para finalizar, debemos tomar c_1 de tal forma que $x(0) = x_0$. Es decir,

$$x_0 = x(0) = \frac{a_0}{2}(0) + v_0(0) + c_1 = c_1,$$

y por lo tanto, la función posición de la partícula viene dada por

$$x(t) = \frac{a_0}{2}t^2 + v_0 t + x_0. \tag{1.3}$$

Ejemplo 1.2. Un automóvil viaja a 100 km/h cuando el conductor observa que se ha presentado un accidente a 80 metros adelante y frena rápidamente. Determine el valor de la desaceleración constante que se requiere para detener a tiempo el automóvil antes de que ocurra una nueva colisión.

Solución. Recordemos que las ecuaciones que rigen un movimiento rectílineo horizontal son

$$x(t) = \frac{1}{2}at + v_0 t + x_0, \quad v(t) = at + v_0, \quad x(0) = x_0, \quad v_0 = v(0).$$

En este caso, supongamos que el movimiento se inicia justo cuando el conductor aplicar los frenos. Es decir,

$$x(0) = x_0 = 0, \quad v(0) = v_0 = 100 \text{ km/h}.$$

De modo que las ecuaciones toman la forma

$$x(t) = \frac{1}{2}at^2 + 100t, \quad v(t) = at + 100.$$

Supongamos que t_p es el tiempo que le toma al carro parar. Es decir, $v(t_p) = 0$. En otras palabras, la ecuación de la velocidad en el tiempo de parada en $t = t_p$ se convierte en

$$0 = v(t_p) = at_p + 100 \quad \Leftrightarrow \quad a = -\frac{100}{t_p}.$$

Dado que la posición final en el tiempo de parada t_p es $x(t_p) = 0{,}08$ km, entonces podemos calcular el tiempo de parada t_p reemplazando el valor de la aceleración en la ecuación $x(t_p) = 0{,}08$, encontrando que

$$x(t_p) = -\frac{1}{2}\frac{100}{t_p}(t_p)^2 + 100t_p = -50t_p + 100t_p = 0{,}08 \;\Leftrightarrow\; t_p = \frac{0{,}08}{50} = 0{,}0016 \text{ h}.$$

Por lo tanto, la aceleración es $a = -\dfrac{100}{t_p} = -\dfrac{100}{0{,}0016}$ km/h^2. Note que la aceleración es negativa debido a que se produce una cambio de una velocidad mayor a una velocidad menor.

En el caso de un **movimiento vertical** denotaremos la función posición como $y(t)$ (altura) y supondremos que el movimiento se realiza hacia abajo. Si suponemos que la única fuerza que actúa sobre la partícula es la gravedad, entonces la aceleración constante es $a_0 = -g$, donde g es la constante gravitacional ($g = 9{,}8$ m/seg^2 o $g = 32$ pies/seg^2). En este caso la función posición $y(t)$ sujeta a las condiciones iniciales $y(0) = y_0$ (altura inicial) y $v(0) = v_0$ es

$$y(t) = -\frac{g}{2}t^2 + v_0 t + y_0. \tag{1.4}$$

Ejemplo 1.3. Si se suelta una pelota desde lo alto de un edificio que tiene 960 pies de altura, determine el tiempo que tarda la pelota en golpear el suelo y cúal es la velocidad con que golpea el suelo.

Solución. Recordemos que las ecuaciones que rigen un movimiento rectílineo vertical sujeto a la acción de la fuerza de la gravedad ($a = -32$ pies/s^2) son

$$y(t) = -16t^2 + v_0 t + y_0, \quad v(t) = -32t + v_0, \quad y(0) = y_0, \quad v_0 = v(0).$$

En este caso, supongamos que el movimiento se inicia justo cuando se lanza la pelota. Es decir,

$$y(0) = 960 \qquad \text{y} \qquad v(0) = 0.$$

De modo que las ecuaciones toman la forma

$$y(t) = -16t^2 + 960 \qquad \text{y} \qquad v(t) = -32t.$$

Si t^* denota el tiempo de llegada al suelo de la pelota, entonces se tiene que $y(t^*) = 0$. Es decir que

$$y(t^*) = -16(t^*)^2 + 960 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t^* = \sqrt{\frac{960}{16}} = \sqrt{60} = 2\sqrt{15}.$$

Por lo tanto, la velocidad final de la pelota es

$$v_f = v(t^*) = -32(2\sqrt{15}) = -64\sqrt{15} \text{ pies/seg}^2.$$

En este caso, la velocidad resulta ser negativa dado que el incremento en la posición va de un mayor a un menor valor.

Ecuación diferencial para modelos de crecimiento o decrecimiento. Los modelos de crecimiento o decrecimiento están caracterizados como aquellos en los cuales la variación de una cantidad H con respecto al tiempo es proporcional a la misma cantidad H. Es decir, la cantidad H satisface la ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{dH(t)}{dt} = kH(t) \tag{1.5}$$

donde la constante de proporcionalidad k determina el crecimiento ($k > 0$) o el decrecimiento ($k < 0$) de la cantidad H.

Para resolver esta ecuación notemos que si $H(t) \neq 0$, entonces

$$\frac{H'(t)}{H(t)} = k.$$

De otro lado, recordando la derivada de la función logaritmo y utilizando la Regla de la Cadena concluimos que

$$\frac{d}{dt}\left[\ln(H(t))\right] = \frac{H'(t)}{H(t)} = k.$$

Si definimos la función $g(t) = \ln(H(t))$, entonces tenemos que g satisface la simple ecuación diferencial

$$g'(t) = k,$$

cuya solución para cualquier constante c tiene la forma

$$g(t) = kt + c.$$

En otras palabras,

$$g(t) = \ln(H(t)) = kt + c \quad \Leftrightarrow \quad H(t) = e^{\ln(H(t))} = e^{kt+c} = e^c e^{kt} = c_1 e^{kt},$$

donde $c_1 = e^c > 0$. Esto es, la solución de la ecuación diferencial

$$\frac{dH(t)}{dt} = kH(t).$$

tiene la forma general $H(t) = c_1 e^{kt}$, donde c_1 es la constante positiva dada por $c_1 = H(0)$.

Modelos poblacionales. Consideremos un modelo de poblaciones en el cual las tasas de nacimiento y mortalidad son constantes. En este caso tenemos que la variación de la población P es proporcional a la población P. Es decir, para alguna constante k, la función población P satisface la ecuación diferencial

$$\frac{dP(t)}{dt} = kP. \tag{1.6}$$

De la discusión anterior, la solución tiene la forma $P(t) = c_1 e^{kt}$. Más aún, $c_1 = P(0)$. De modo que la solución tiene la forma $P(t) = P(0)e^{kt}$.

Ejemplo 1.4. Una población $P(t)$ de bacterias presente en una cuerpo infectado crece a una tasa proporcional a su tamaño ($P'(t) = kP(t)$ con $k > 0$). A primera hora en la mañana la población era de 100 000 bacterias y dos horas después era de 5000 000 bacterias. Determinar el número de bacterias presentes en la infección un día después (24 horas). Si el número de bacterias máxima que puede resistir el cuerpo infectado es de 10^{50}, determine el número de horas de vida que tiene el cuerpo infectado.

Solución. De la discusión anterior, $P(0) = 100\,000$, $P(2) = 5000\,000$ y el número de bacterias en el tiempo t es

$$P(t) = P(0)e^{kt} = 100\,000e^{kt}.$$

Para resolver completamente el problema necesitamos calcular el valor de k. Dado que $P(2) = 5000\,000$, entonces

$$P(2) = 5000\,000 = 100\,000e^{2k} \quad \Leftrightarrow \quad e^{2k} = 50 \quad \Leftrightarrow \quad e^k = \sqrt{50}.$$

En consecuencia,

$$P(t) = 100\,000e^{kt} = 100\,000(e^k)^t = 100\,000(\sqrt{50})^t = 100\,000(50)^{\frac{t}{2}}.$$

Así que $P(24) = 100\,000(50^{12}) = 5^{12}10^{17}$ es el número de bacterias un día después del inicio de la infección. Finalmente, el número de horas de vida t_0 que tiene el cuerpo infectado satisface la ecuación $P(t_0) = 10^{50}$. Es decir,

$$P(t_0) = 10^{50} = 100\,000(50)^{\frac{t_0}{2}} = 10^{50} \Leftrightarrow (50)^{\frac{t_0}{2}} = 10^{45} \Leftrightarrow t_0 = \frac{90}{\log_{10}(50)}.$$

Ley de enfriamiento de Newton. La ley de enfriamiento de Newton establece que la variación de la temperatura T de un cuerpo es proporcional a la diferencia entre la temperatura T y la temperatura del medio ambiente T_A. Es decir, la función temperatura T satisface la ecuación diferencial

$$\frac{dT(t)}{dt} = k(T - T_A). \tag{1.7}$$

Note que esta se puede resolver mediante una sustitución simple que la transforma en la ecuación general del modelo de crecimiento/decrecimiento presentado anteriormente. En efecto, definamos $G = T - T_A$. Entonces G satisface la ecuación diferencial

$$\frac{dG(t)}{dt} = kG(t).$$

Así que para alguna constante positiva c, la solución tiene la forma, $G(t) = ce^k$ (en realidad $c = G(0)$). En consecuencia, la temperatura del cuerpo viene dado por

$$G(t) = ce^{kt} \quad \Leftrightarrow \quad T(t) - T_A = ce^{kt} \quad \Leftrightarrow \quad T(t) = ce^{kt} + T_A.$$

Notemos que $T(0) = c + T_A$. Es decir que $c = T(0) - T_A$.

Ejemplo 1.5. Un pastel se saca del horno a 350 grados F y se deja enfriar en una habitación a 75 grados F. Si la temperatura del pastel descendió en media hora a 200 grado F. Determinar la temperatura tres horas después de haber sacado el pastel del horno.

Solución. De la discusión anterior,

$$\frac{dT(t)}{dt} = k(T - T_A), \qquad T(t) = ce^{kt} + T_A \qquad \text{y} \qquad c = T(0) - T_A.$$

En este caso, la temperatura ambiente es $T_A = 75$, $T(0) = 350$, $T(\frac{1}{2}) = 200$. Estamos interesados en determinar $T(3)$. Ahora, $c = T(0) - T_A = 350 - 75 = 275$. Por lo tanto, la temperatura $T(t)$ en cualquier instante t es

$$T(t) = ce^{kt} + T_A = 275e^{kt} + 75.$$

Para determinar T completamente debemos calcular k. Para ello usemos la condición $T\left(\frac{1}{2}\right) = 200$. Es decir,

$$T\left(\frac{1}{2}\right) = 275e^{\frac{k}{2}} + 75 = 200 \quad \Leftrightarrow \quad e^{\frac{k}{2}} = \frac{125}{275} = \frac{5}{11} \quad \Leftrightarrow \quad e^k = \left(\frac{5}{11}\right)^2.$$

De donde concluimos que

$$T(t) = 275\left(\frac{5}{11}\right)^{2t} + 75,$$

y la temperatura tres horas después es

$$T(3) = 275\left(\frac{5}{11}\right)^{6} + 75 \approx 77{,}425°\text{F}.$$

Ejercicios

1. Resuelva las ecuaciones diferenciables con condiciones iniciales

   a) $\dfrac{dg}{dh} = 2h + 1; \quad g(0) = 3.$

   b) $\dfrac{ds}{dt} = \sqrt{t}; \quad s(4) = 0.$

   c) $\dfrac{dw}{dt} = \dfrac{1}{\sqrt{t+2}}; \quad w(2) = -1.$

   d) $\dfrac{dT}{dm} = 3m^3 + \dfrac{2}{m^2}; \quad T(1) = 1.$

   e) $\dfrac{dr}{ds} = (s-1)^3; \quad r(0) = 2.$

   f) $\dfrac{dR}{dl} = \dfrac{1}{\sqrt{l-13}}; \quad R(17) = 3.$

2. Luis arroja una pelota hacia arriba, desde el suelo, con una velocidad inicial de 97 pies/seg. ¿A qué altura sube la pelota y por cuánto tiempo permanece en el aire?
3. Mauricio suelta una piedra a un pozo; ésta llega al fondo 3 segundos después. ¿Cuál es la profundidad del pozo?
4. Oscar arroja una pelota hacia arriba, con una velocidad inicial de 48 pies/seg, desde la parte superior de un edificio de altura 160 pies. La pelota cae al suelo en la base del edificio. ¿Cuánto tiempo permanece la pelota en el aire y con qué velocidad golpea el suelo?
5. Se suelta una pelota desde lo más alto del *Empire State Building*, a 960 pies de altura sobre la calle 34. ¿Cuánto tiempo tarda la pelota en llegar a la calle y con qué velocidad la golpea?
6. Jhon arroja una piedra hacia arriba, desde el suelo. La piedra alcanza una altura máxima de 225 pies de altura. ¿Cuál era su velocidad inicial?
7. Nicolas arroja una pelota de tenis hacia arriba, desde la parte superior de un edificio de 400 pies de altura con velocidad inicial $v_0 = 80$ pies/seg. ¿Cuánto tiempo tarda la pelota en llegar al suelo? ¿Con qué velocidad golpea el suelo?
8. Se arroja una pelota hacia arriba, desde el suelo, con una velocidad inicial de 160 pies/seg. ¿Cuál es la altura máxima que alcanza la pelota?

9. Valeria arroja una pelota de béisbol hacia abajo, con una velocidad inicial de 40 pies/seg, desde lo alto del monumento a Washington, de 555 pies de altura. ¿Cuánto tarda la pelota en llegar al suelo y con qué velocidad lo golpea?
10. Se suelta una bomba desde un globo a una altura de 800 pies. Directamente debajo del globo, se lanza un proyectil hacia arriba, hacia la bomba, exactamente dos segundos después del lanzamiento de la bomba. ¿Con qué velocidad inicial debe dispararse el proyectil para que choque con la bomba a una altura exacta de 400 pies?
11. Un auto que viaja a 60 millas/hora (exactamente 88 pies/seg) se desplaza 176 pies después de aplicar sus frenos. La desaceleración que proporcionan los frenos es constante. ¿Cuál es el valor de ésta?
12. Una población de bacterias crece a una tasa proporcional a su tamaño. Al principio es de 20 000 y después de 10 días es de 30 000.
    a) Determine la población después de 30 días.
    b) ¿Cuánto tardará la población de bacterias en triplicarse?
13. Un termómetro registró -20 grados centígrados en el exterior y después entró a una casa en donde la temperatura era de 24 grados centígrados. Después de 5 minutos, el termómetro registró 0 grados centígrados. ¿Cuándo marcará 20 grados centígrados?
14. **Modelo de mezclas.** Considere un tanque con un volumen dado V_0 el cual contiene una solución. Un problema simple de mezclas consiste en vertir en el tanque una sustancia a una razón y drenar la mezcla a una cierta razón. Si suponemos que $S(t)$ representa la cantidad de sustancia en el instante t, entonces se puede mostrar que la variación de la cantidad de sustancias $S'(t)$ viene dada por una ecuación diferencial de la forma

$$\frac{dS(t)}{dt} = \alpha(t) - \beta(t)S(t), \tag{1.8}$$

para algunas funciones α y β, que dependen de las razones de entrada y salida, y del volumen en el tiempo t. Si suponemos que la razón de entrada r_e y la razón de salida r_s de la sustancia son constantes iguales. Entonces, el volumen en el tiempo t es constante e igual a $V = V_0$. Además,

$$\frac{dS(t)}{dt} = (\text{razón de entrada}) - (\text{razón de salida}),$$

donde

$$\begin{aligned}\text{razón de entrada} &= (\text{concentración de entrada}) \cdot (\text{rapidez de entrada})\\ &= (C_e \cdot r_e)\left(\frac{\text{kg}}{\text{min}}\right) = \alpha\ \left(\frac{\text{kg}}{\text{min}}\right).\end{aligned}$$

Similarmente tenemos que

$$\begin{aligned}\text{razón de salida} &= (\text{concentración de salida}) \cdot (\text{rapidez de salida})\\ &= \left(\frac{S(t)}{V_0} \cdot r_s\right)\left(\frac{\text{kg}}{\text{min}}\right) = \left(\frac{r_s}{V_0}\right) S(t) \left(\frac{\text{kg}}{\text{min}}\right)\\ &= \beta S(t)\ \left(\frac{\text{kg}}{\text{min}}\right).\end{aligned}$$

De donde S satisface la ecuación diferencial

$$\frac{dS(t)}{dt} = \alpha - \beta S(t),$$

con α y β constantes. Muestre que este modelo se puede reescribir apropiadamente como

$$\frac{dS(t)}{dt} = -\beta(S - S_A), \quad \text{donde} \quad S_A = \frac{\alpha}{\beta}.$$

Muestre que la cantidad de solución $S(t)$ viene dada por

$$S(t) = ce^{-\beta t} + S_A = ce^{-\beta t} + \frac{\alpha}{\beta},$$

donde $c = S(0) - S_A$ (utilice la fórmula para la ley de enfriamiento de Newton). Considere un tanque de volumen $V_0 = 5\,000$ litros de agua que contiene 50 kg de sal. Si al tanque se le vierte salmuera que contiene 0.05 kg de sal por litro de agua, a una razón de 50 litros por minuto, y si se drena del tanque solución con una rapidez de 50 litros por minuto, determine la cantidad de sal que permanece en el tanque después de media hora.

1.1. Antiderivadas

DEFINICIÓN 1.6 (**Antiderivada**). Diremos que la función F es una antiderivada o una primitiva para la función f en un intervalo abierto I, si F satisface la ecuación

$$F'(x) = f(x), \tag{1.9}$$

para todo $x \in I$.

Observemos que si una función f tiene una antiderivada o primitiva F, entonces sabemos que en realidad tiene infinitas antiderivadas o primitivas, pues para cada constante $c \in \mathbb{R}$, la familia de funciones

$$F_c(x) = F(x) + c$$

también es una antiderivada o primitiva de f. De otro lado, supongamos que f tiene antiderivadas g y h sobre un intervalo abierto I. Entonces nos preguntamos que relación existe entre g y h. Notemos que $g'(x) = f(x)$ y $h'(x) = f(x)$ sobre el intervalo abierto I. Por lo tanto, la función $H = g - h$ es tal que

$$H'(x) = g'(x) - h'(x) = f(x) - f(x) = 0, \quad x \in I.$$

Como consecuencia de lo anterior, H debe ser una función constante sobre I, dado que I es un intervalo abierto. Es decir, existe una constante $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$H(x) = c, \quad x \in I \qquad \Leftrightarrow \qquad g(x) = h(x) + c, \quad x \in I.$$

En otras palabras, hemos demostrado el siguiente resultado que caracteriza la antiderivada general para una función dada.

TEOREMA 1.7 (**Antiderivada general**). *Si F es una antiderivada para f sobre el intervalo abierto I, entonces para toda constante c, $F(x) + c$ también es una antiderivada para f sobre el intervalo I. Más aún, si F y G son antiderivadas para f en un intervalo abierto I, entonces $F(x) - G(x) = c$ sobre I, donde c es una constante. En otra palabras, la antiderivada más general para f sobre un intervalo abierto tiene la forma $F(x) + c$, donde F es una antiderivada cualquiera para f sobre el intervalo I.*

DEFINICIÓN 1.8 (**Integral indefinida**). Llamaremos integral indefinida de f sobre un intervalo abierto I, denotada como

$$\int f(x)\,dx,$$

al conjunto de todas las antiderivadas o primitivas de f sobre I.

Como consecuencia de la definición de integral indefinida y el Teorema 1.7,

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c$$

donde F es una antiderivada o una primitiva y $c \in \mathbb{R}$.

Observación 1.9. Note que los siguientes hechos muestran formalmente como la antiderivación y la derivación son procesos esencialmente inversos. En efecto, si F es una antiderivada de f, entonces la antiderivada general de f viene dada por

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c.$$

Por lo tanto,

$$\frac{d}{dx}\left(\int f(x)\,dx\right) = \frac{d}{dx}\,(F(x)+c) = F'(x) = f(x).$$

De otro lado, si f es diferenciable se tiene que

$$\int f'(x)\,dx = f(x) + c, \quad c \in \mathbb{R},$$

dado que la función f es una antiderivada de f'.

Ejemplos 1.10. Encontrar una antiderivada para las siguientes funciones dadas

a) $h(y) = 3y^2 + 4y + 6$. b) $u(x) = \cos(x)$. c) $w(z) = e^z + 3$.

Solución. a). Estamos interesados en encontrar una función diferenciable g tal que

$$g'(y) = 3y^2 + 4y + 6.$$

En este caso, por simple inspección observamos que $g(y) = y^3 + 2y^2 + 6y$ es una antiderivada de $h(y) = 3y^2 + 4y + 6$. Más aún, la función $g_1(y) = y^3 + 2y^2 + 6y + 2$ también es una antiderivada de h. ¿En qué se diferencian estas dos funciones?

b). Queremos encontrar una función g cuya derivada sea $u(x) = \cos(x)$ y sabemos que la función $g(x) = \operatorname{sen}(x)$ es tal que

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sen}(x) = \cos(x).$$

Por lo tanto, podemos concluir que $g(x) = \operatorname{sen}(x)$ es una antiderivada de la función $u(x) = \cos(x)$.

c). Recordemos del curso de Cálculo I que la derivada de la función exponencial $h(z) = e^z$ es la misma función exponencial. Es decir, $h'(z) = e^z = h(z)$. Por lo tanto, una antiderivada de la función $w(z) = e^z + 3$ es la función $g_1(z) = e^z + 3z + 1$, como también lo son las funciones $g_2(z) = e^z + 3z + 3$, o $g_4(z) = e^z + 3z + 4$, o de forma general ¿$g_c(z) =$ ________________?

Utilizando las propiedades de linealidad para funciones diferenciables, es posible obtener las siguientes propiedades de linealidad para antiderivadas.

Teorema 1.11 (**Propiedades de linealidad**).

a) $\displaystyle\int [f(x)+g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx.$

b) $\displaystyle\int \alpha f(x)\,dx = \alpha \int f(x)\,dx.$

Ejemplo 1.12. 1.- Determinar la antiderivada general o integral indefinida para las funciones dadas.

a) $f(x) = 2.$ b) $g(x) = 4x^5 + 3.$ c) $h(u) = \dfrac{2}{u^{\frac{1}{2}}}.$

d) $i(z) = \operatorname{sen}(4z) - 2e^{2z}.$ e) $k(y) = \cos\left(\frac{y}{5}\right) - 3y^{-\frac{2}{3}}.$

2.- Resolver la ecuación diferencial con condición inicial

$$\frac{dy}{dx} = 4x^3 - 2x + 3, \quad \text{sujeto a la condición inicial } y(2) = 10.$$

Solución. 1.- a) La integral indefinida de la función $f(x) = 2$ se simboliza como $\displaystyle\int 2\,dx$. En este caso, para $c \in \mathbb{R}$,

$$\int 2\,dx = 2\int 1\,dx = 2x + c.$$

b) Para $c \in \mathbb{R}$,

$$\int (4x^5+3)\,dx = 4\int x^5\,dx + 3\int 1\,dx = 4\left(\frac{x^6}{6}\right) + 3x + c = \frac{2}{3}x^6 + 3x + c.$$

c) Para $c \in \mathbb{R}$,

$$\int \frac{2}{u^{\frac{1}{2}}}\,du = 2\int u^{-\frac{1}{2}}\,du = 2\left(\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right) + c = 4u^{\frac{1}{2}} + c.$$

d) Para $c \in \mathbb{R}$,

$$\int (\operatorname{sen}(4z) - 2e^{2z})\,dz = \frac{-\cos(4z)}{4} - 2\left(\frac{e^{2z}}{2}\right) + c = -\frac{1}{4}\cos(4z) - e^{2z} + c.$$

e) Para $c \in \mathbb{R}$,

$$\int \left(\cos\left(\frac{y}{5}\right) - 3y^{-\frac{2}{3}} \right) dy = 5 \operatorname{sen}\left(\frac{y}{5}\right) - 3\frac{y^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} + c = 5 \operatorname{sen}\left(\frac{y}{5}\right) - 9y^{\frac{1}{3}} + c.$$

2) Recordemos que resolver la ecuación diferencial $\dfrac{dy}{dx} = 4x^3 - 2x + 3$ es equivalente a encontrar una antiderivada $y(x)$ para la función $f(x) = 4x^3 - 2x + 3$. En este caso, para toda constante c, la antiderivada general de f tiene la forma $y(x) = x^4 - x^2 + 3x + c$. Finalmente, queremos una solución de la ecuación diferencias, sujeta a la condición inicial $y(2) = 10$. por tanto, debemos escoger c tal que

$$y(2) = 2^4 - 2^2 + 3(2) + c = 10 \quad \Leftrightarrow \quad c = -8.$$

En otras palabras $y(x) = x^4 - x^2 + 3x - 8$ es la solución deseada.

Ejemplo 1.13. En el siguiente ejemplo vamos a visualizar de forma geométrica qué relación existe entre la gráfica de f y la gráfica de una de sus antiderivadas. Más concretamente, considere dada la gráfica de una función f.

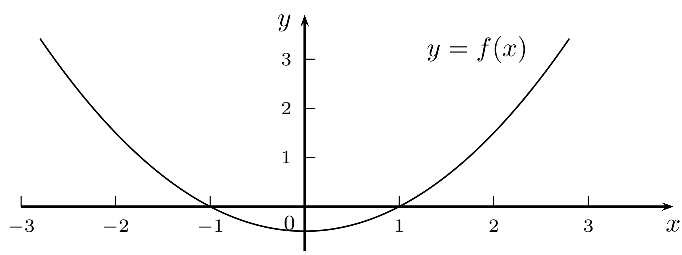


Figura 1.1.1: Gráfica de la función f.

a) Hacer un bosquejo de la gráfica de una antiderivada G para función f tal que $G(0) = 0$.

b) Hacer un bosquejo de la gráfica de una antiderivada H para función f tal que $H(0) = 2$.

Solución. a) En primer lugar, si G es una antiderivada de f, entonces $G'(x) = f(x)$. Para hacer un bosquejo de la gráficas de la antiderivada G, debemos tener en cuenta que los puntos críticos de G corresponden a puntos x_0 en donde $f(x_0) = 0$, pues $G'(x_0) = f(x_0) = 0$. Además, sobre los intervalos donde $f(x) > 0$ tenemos que G es estrictamente creciente, dado que $G'(x) = f(x) > 0$. De forma análoga, sobre los intervalos en donde $f(x) < 0$, entonces G es estrictamente decreciente, puesto que $G'(x) = f(x) < 0$. Además recordemos que $G(0) = 0$.

En este ejemplo, la función f tiene dos ceros en $x_1 = -1$ y $x_2 = 1$. Así que G tiene dos puntos críticos $x_1 = -1$ y $x_2 = 1$. Además, $f(x) > 0$ para $x > 1$. Por lo tanto, G es creciente para $x > 1$. De otro lado, $f(x) < 0$ para $-1 < x < 1$. Así que G es decreciente en el intervalo $(-1, 1)$. Del criterio de la primera derivada, se tiene que G tiene un valor mínimo en $x = 1$. Ahora, para $x < -1$, la función f es positiva, y por lo tanto, G es creciente. Como consecuencia, la función G debe tener un valor máximo en $x = -1$. En resumen tenemos:

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$
f	$+$	$-$	$+$
G	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

En conclusión, la gráfica de la antiderivada G_1 para la función f tal que $G(0) = 0$ debe tener la forma siguiente.

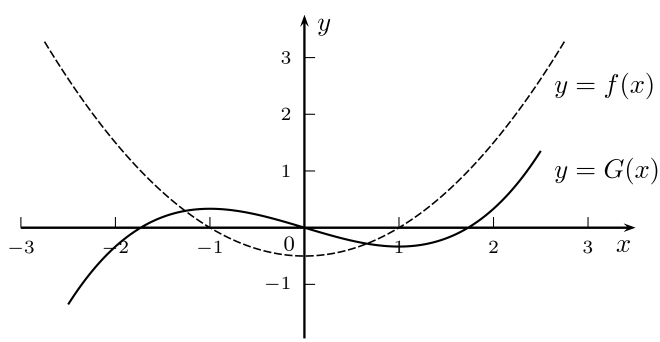


Figura 1.1.2: Gráfica de la antiderivada G con $G(0) = 0$.

b) En este caso debemos recordar que si G y H son antiderivadas de f, entonces se tiene que $H(x) - G(x) = C$, para alguna constante $C \in \mathbb{R}$. Puesto que estamos interesados en una antiderivada H para la función f tal que $H(0) = 2$, entonces $2 = H(0) = G(0) + C$. Es decir que $C = 2$, pues $G(0) = 0$. Más aún, $H(x) = G(x) + 2$. Por tanto, la gráfica de H es la gráfica de G subida dos unidades sobre el eje y (ver Figura 1.1.3).

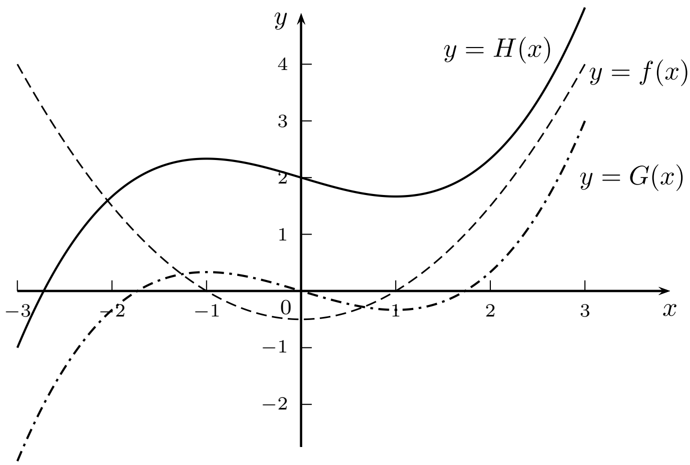


Figura 1.1.3: Gráficas de las antiderivadas G con $G(0) = 0$ y H con $H(0) = 2$.

Es importante para el desarrollo de los temas posteriores, tener muy presente el siguiente listado básico de antiderivadas estudiadas en el curso de Cálculo I.

Fórmulas de Antiderivadas

$$\int x^r\,dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + c, \quad r \neq -1. \qquad \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c.$$

$$\int e^{kz}\,dz = \frac{1}{k}\,e^{kz} + c. \qquad \int a^{kx}\,dx = \frac{1}{k\ln a}\,a^{kx} + c.$$

$$\int \cos(ku)\,du = \frac{1}{k}\,\mathrm{sen}(ku) + c. \qquad \int \mathrm{sen}(kw)\,dw = -\frac{1}{k}\cos(kw) + c.$$

$$\int \sec^2(ku)\,du = \frac{1}{k}\tan(ku) + c. \qquad \int \csc^2(kx)\,dx = -\frac{1}{k}\cot(kx) + c.$$

$$\int \sec(ks)\tan(ks)\,ds = \frac{1}{k}\sec(ks) + c. \qquad \int \csc(kw)\cot(kw)\,dw = -\frac{1}{k}\csc(kw) + c.$$

$$\int \sec(kz)\,dz = \frac{1}{k}\ln|\sec(kz) + \tan(kz)| + c. \qquad \int \csc(ky)\,dy = \frac{1}{k}\ln|\csc(ky) - \cot(ky)| + c.$$

$$\int \frac{1}{a^2+w^2}\,dw = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{w}{a}\right) + c. \qquad \int \frac{1}{a^2-w^2}\,dw = \frac{1}{2w}\ln\frac{x-w}{x+w} + c.$$

$$\int \frac{1}{|y|\sqrt{y^2-1}}\,dy = \sec^{-1}(y)+c. \qquad \int \frac{1}{|t|\sqrt{t^2-1}}\,dy = -\csc^{-1}(t)+c.$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\,dz = \arcsin(z)+c \quad (\arcsin(z)=\operatorname{sen}^{-1}(z)).$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\,dz = -\arccos(z)+c \quad (\arccos(z)=\cos^{-1}(z)).$$

Ejercicios

1.- Determine las siguientes integrales indefinidas

a) $\int (3u^2+2u+1)\,du.$

b) $\int (1-2z^2+3z^3)\,dz.$

c) $\int \left(\frac{3}{w^3}+2w^{3/2}-1\right)\,dw.$

d) $\int \left(\frac{3}{2}z^{3/2}+7\right)\,dz.$

e) $\int \left(\sqrt[3]{x^2}+\frac{4}{\sqrt[4]{x^5}}\right)\,dx.$

f) $\int (4z^3-4z+6)\,dz.$

g) $\int 7\,dy.$

h) $\int (y+1)^4\,dy.$

i) $\int \sqrt{r}(1-r)^2\,dr.$

j) $\int \left(\frac{2t^2-3t^3+5}{7t^2}\right)\,dt.$

k) $\int (9s+11)^5\,ds.$

l) $\int (5\cos(10t)-10\operatorname{sen}(5t))\,dt.$

m) $\int \frac{1}{(y-10)^7}\,dy.$

n) $\int \frac{7}{(t+77)^2}\,dt.$

ñ) $\int (3\cos(\pi t)+\cos(3\pi t))\,dt.$

2.- Resuelva las ecuaciones diferenciables con condiciones iniciales

a) $\frac{dg}{dh}=2h+1; \quad g(0)=3.$

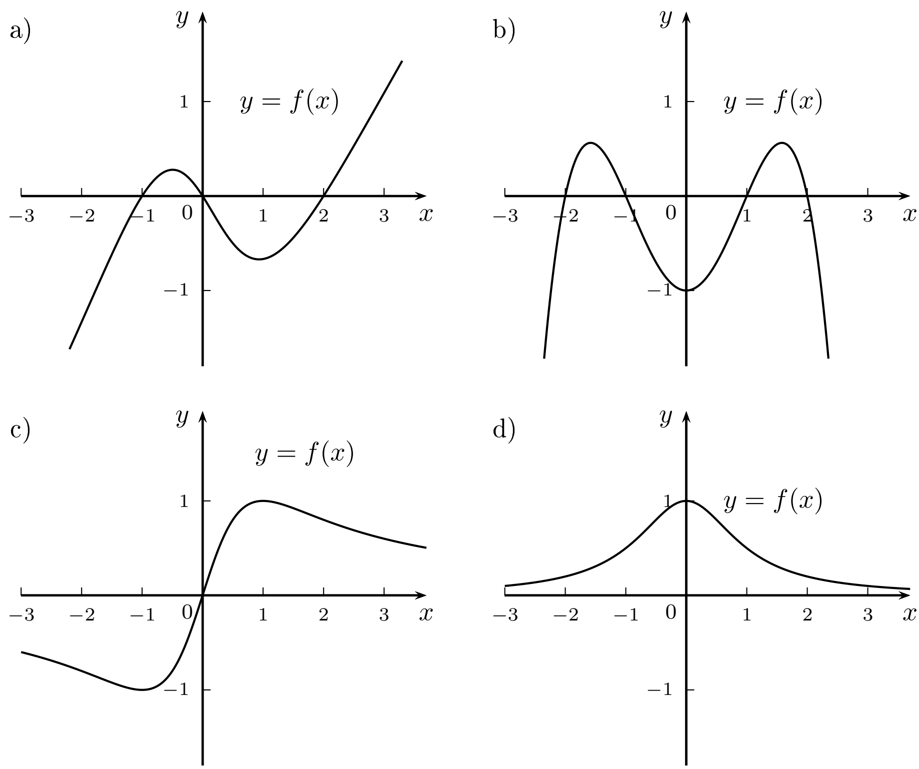
b) $\frac{ds}{dt}=\sqrt{t}; \quad s(4)=0.$

c) $\frac{ds}{dt}=\frac{1}{\sqrt{t+2}}; \quad s(2)=-1.$

d) $\frac{dg}{dh}=3h^3+\frac{2}{h^2}; \quad g(1)=1.$

e) $\dfrac{dg}{dh} = (h-1)^3; \quad g(0) = 2.$ f) $\dfrac{dg}{dh} = \dfrac{1}{\sqrt{h-13}}; \quad g(17) = 3.$

3.- Dada la gráfica de la función f sobre un intervalo I, haga un bosquejo de la gráfica de una antiderivada F para f sobre el intervalo I.



1.2. Técnicas de integración

En la sección anterior describimos el proceso de integración como aquel que nos permite resolver el siguiente problema: **Dada una función $f(x)$, encontrar una familia de funciones del tipo $F(x) + c$ donde $F'(x) = f(x)$ y $c \in \mathbb{R}$ es una constante arbitraria**.

Una vez planteado el problema a resolver, surgen dos preguntas naturales; la primera es: Dada una función $f(x)$, ¿es siempre posible encontrar dicha familia de funciones que satisfagan las condiciones requeridas?, y la segunda: Si existe una tal familia, ¿cómo encontrarla?, es decir cómo exhibir una antiderivada para $f(x)$.

En esta sección nos centraremos en responder a la segunda pregunta. Para lograr este objetivo, vamos a presentar algunas técnicas para el cálculo de integrales indefinidas para encontrar antiderivadas en algunos casos especiales, entre las que se encuentran: método de sustitución, método de integración por partes, integrales trigonométricas, fracciones parciales y sustituciones trigonométricas.

1.2.1. Método de sustitución. Uno de los métodos más simples usado en el cálculo de integrales indefinidas consiste efectuar una sustitución o cambio de la variable de integración. Con el fin de ilustrar esta técnica, calculemos la siguiente integral indefinida

$$I = \int (4x+1)^{\frac{1}{3}}\, dx.$$

Debemos observar en primer lugar que si hacemos $y = 4x+1$ vemos que el integrando es la composición de y con la función $f(y) = y^{\frac{1}{3}}$. Así que podemos intentar dar una respuesta inmediata a este problema dado que la integral $f(y) = y^{\frac{1}{3}}$ tiene como antiderivada la función $F(y) = \dfrac{3y^{\frac{4}{3}}}{4} + c$. Si intentamos usar este resultado de una manera desprevenida, obtenemos que

$$I = \int (4x+1)^{\frac{1}{3}}\, dx = \frac{3(4x+1)^{\frac{4}{3}}}{4} + c,$$

lo cual nos produce una respuesta incorrecta puesto que al derivar la anterior igualdad en ambos lados concluiríamos que

$$(4x+1)^{\frac{1}{3}} = 4(4x+1)^{\frac{1}{3}}.$$

Este error se presenta debido a que olvidamos que el integrando es una composición de funciones $f(y) = y^{\frac{1}{3}}$ con la función $u(x) = 4x+1$, la cual tiene al factor 4 como su derivada interna. Para evitar cometer este tipo de errores, realicemos la siguiente sustitución $u = 4x+1$. Note que $\frac{du}{dx} = 4$, lo cual escribiremos como $du = 4\, dx$. Por lo tanto, $dx = \frac{1}{4}\, du$. Reemplazando la variable u por la variable x, y expresando dx en términos de du,

$$I = \int (4x+1)^{\frac{1}{3}}\, dx = \int u^{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{4}\right) du = \left(\frac{1}{4}\right) \frac{u^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + c = \frac{3}{16}(4x+1)^{\frac{4}{3}} + c.$$

Utilizando argumentos similares, pero un poco más sofisticados podemos encontrar la siguiente integral indefinida

$$I = \int \frac{w}{w^2+4}\, dw.$$

En este caso, definamos $v = w^2 + 4$. Entonces $\frac{dv}{dw} = 2w$, que puede ser reinterpretado como

$$dv = 2w\,dw.$$

Por tanto, al realizar la sustitución de la variable w por la variable v encontramos que

$$\int \frac{w}{w^2+4}\,dw = \frac{1}{2}\int \frac{2w}{w^2+4}\,dw = \frac{1}{2}\int \frac{1}{v}\,dv = \frac{1}{2}\ln|v| + c = \frac{1}{2}\ln(w^2+4) + c.$$

En general, utilizando la regla de la cadena se puede ver directamente que,

Teorema 1.14. *Si g es una función diferenciable, entonces*

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(u)\,du.$$

Más aún, si F es una antiderivada de f, entonces $F(g(x))$ es una antiderivada de $f(g(x))g'(x)$, y

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x)) + C.$$

Demostración. Consideremos la sustitución $u = g(x)$. Entonces, $du = g'(x)\,dx$. Por lo tanto,

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(u)\,du.$$

Sea F una antiderivada de f. Es decir, $F'(z) = f(z)$. Ahora de la regla de la cadena,

$$\frac{d}{dx}\left(F(g(x))\right) = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x).$$

Por lo tanto,

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int \frac{d}{dx}\left(F(g(x))\right)\,dx = F(g(x)) + C.$$

En otras palabras, $F(g(x))$ es una antiderivada de $f(g(x))g'(x)$.

Observación 1.15. Antes de considerar los ejemplos es muy importante mantener en mente que de acuerdo con el Teorema 1.14, para aplicar el método de sustitución es necesario cerciorarnos de que el integrando de la integral a calcular tenga la forma $f(g(x)) \cdot g'(x)$ para unas ciertas funciones f y g. Más concretamente, la derivada de la función $y = g(x)$ debe hacer parte del integrando.

Ejemplos 1.16. 1.- Las siguientes funciones tienen la forma $cf(g(x)) \cdot g'(x)$ para algunas funciones f y g,

a) $F(x) = e^x \operatorname{sen}(e^x)$.

b) $G(x) = \dfrac{x}{1+x^4}$.

2.- Calcule las siguientes integrales indefinidas o antiderivadas

a) $\displaystyle\int (5-3x)^{-1/3}\,dx.$ b) $\displaystyle\int 2z^3\sqrt{3z^4+2}\,dz.$

c) $\displaystyle\int \cos^4(w)\,\mathrm{sen}(w)\,dw.$ d) $\displaystyle\int \frac{\sec^2(\sqrt{s})}{\sqrt{s}}\,ds.$

3) Considere la integral indefinida en la variable w

$$I=\int w^6\sqrt{w^3+2}\,dw.$$

Si $z^2=w^3+1$, expresar la integral indefinida I en términos de la variable z.

Solución. 1.- a) Primero que todo siempre debemos concentrarnos en la parte más compleja de la expresión, que en este caso es $\mathrm{sen}(e^x)$ y dejamos de lado por ahora el resto. Si consideramos las funciones $f(y)=\mathrm{sen}(y)$ y $g(x)=e^x$ observamos que $g'(x)=e^x$. Por lo tanto, $F(x)=e^x\,\mathrm{sen}(e^x)$ tiene la forma $F(x)=f(g(x))\cdot g'(x)$.

b) El caso $G(x)=\dfrac{x}{1+x^4}$ parece ser un poco más complejo, pero todo depende de las escogencias que se realicen. Para empezar notemos que $G(x)=x\left(\dfrac{1}{1+x^4}\right)$. Si hacemos $g(x)=x^2$ vemos que $g'(x)=2x$. De donde $x=\frac{1}{2}g'(x)$. Por lo tanto,

$$G(x)=\frac{x}{1+x^4}=x\left(\frac{1}{1+x^4}\right)=x\left(\frac{1}{1+(x^2)^2}\right)=\frac{1}{2}g(x)\left(\frac{1}{1+(g(x))^2}\right)$$

Por lo tanto, si definimos $f(y)=\dfrac{1}{1+y^2}$ vemos que $G(x)=\frac{1}{2}f(g(x))g'(x)$.

2.- a) Sea $I=\displaystyle\int(5-3x)^{-\frac{1}{3}}dx.$

Haciendo la sustitución $u=5-3x$, tenemos que $du=-3\,dx$. Por tanto, sustituyendo la integral inicial se transforma en

$$\begin{aligned}\int u^{-\frac{1}{3}}\left(-\frac{du}{3}\right)&=-\frac{1}{3}\int u^{-\frac{1}{3}}\,du=-\frac{1}{3}\left(\frac{u^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1}\right)+c\\&=-\frac{1}{3}\frac{u^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}+C=-\frac{1}{2}u^{\frac{2}{3}}+c=-\frac{1}{2}(5-3x)^{\frac{2}{3}}+c.\end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\int(5-3x)^{-\frac{1}{3}}dx=-\frac{1}{2}(5-3x)^{\frac{2}{3}}+c.$$

¿Puede usted verificar que la integral está bien calculada?

b) Sea $I = \displaystyle\int 2z^3\sqrt{3z^4+2}dz.$

Haciendo la sustitución $w = 3z^4 + 2$ tenemos que $dw = 12z^3dz$. Por lo tanto, sustituyendo la integral inicial se transforma en

$$\begin{aligned}\int \sqrt{w}\left(\frac{dw}{6}\right) &= \frac{1}{6}\int w^{\frac{1}{2}}dw = \frac{1}{6}\left(\frac{w^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right)+c\\ &= \frac{1}{6}\frac{w^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+c = \frac{1}{9}w^{\frac{3}{2}}+C = \frac{1}{9}(3z^4+2)^{\frac{3}{2}}+c.\end{aligned}$$

En consecuencia

$$\int 2z^3\sqrt{3z^4+2}dz = \frac{1}{9}(3z^4+2)^{\frac{3}{2}}+c.$$

Nuevamente, ¿cómo se puede verificar que la integral está bien calculada?

c) Sea $I = \displaystyle\int \cos^4(w)\,\mathrm{sen}(w)\,dw.$

Consideremos la sustitución $p = \cos(w)$. Entonces, $dp = -\mathrm{sen}(w)dw$. Por lo tanto, la integral se transforma en

$$\int \cos^4(w)\,\mathrm{sen}(w)dw = -\int p^4dp = -\frac{1}{5}p^5+c = -\frac{1}{5}\cos^5(w)+c.$$

d) Sea $I = \displaystyle\int \frac{\sec^2(\sqrt{s})}{\sqrt{s}}ds.$

Esta es otra integral en la que se puede utilizar el método de sustitución. En efecto, sea $r = \sqrt{s}$. Entonces, $dr = \dfrac{1}{2\sqrt{s}}ds$. De esta forma tenemos que

$$\int \frac{\sec^2(\sqrt{s})}{\sqrt{s}}ds = 2\int \sec^2(r)\,dr = 2\tan(r)+c = 2\tan(\sqrt{s})+c.$$

3.- Sea $z^2 = w^3+1$. Entonces, $z = \sqrt{w^3+1}$, $w^3+2 = z^2+1$ y $w = \sqrt[3]{z^2-1}$. Derivando z con respecto a la variable w obtenemos que

$$\frac{dz}{dw} = \frac{1}{2}(w^3+1)^{-\frac{1}{2}}(3w^2) = \frac{3}{2}(w^3+1)^{-\frac{1}{2}}w^2 \quad\Leftrightarrow\quad dz = \frac{3}{2}(w^3+1)^{-\frac{1}{2}}w^2\,dw.$$

Esta última fórmula se puede reescribir como $\frac{2}{3}zdz = w^2\,dw$. Por lo tanto,

$$I = \int w^5\sqrt{w^3+2}\,dw = \int w^3\sqrt{w^3+2}(w^2\,dw) = \frac{2}{3}\int z\left(z^2-1\right)\sqrt{z^2+1}\;dz.$$

Ejercicios

Evalúe las siguientes integrales indefinidas.

1. $\int (y+1)^6\,dy.$
2. $\int (4-3z)^7\,dz.$
3. $\int (y^2+2y+1)^4(y+1)\,dy.$
4. $\int \operatorname{sen}(\pi t+1)\,dt.$
5. $\int r\sqrt{r^2-1}\,dr.$
6. $\int \sec(2\theta)\tan(2\theta)\,d\theta.$
7. $\int r\sqrt{2-3r^2}\,dr.$
8. $\int v^3\sqrt{v^4+1}\,dv.$
9. $\int (2+x^2)\sqrt[3]{6x+x^3}\,dx.$
10. $\int z^2\cos(2z^3)\,dz.$
11. $\int \cos^3(s)\operatorname{sen}(s)\,ds.$
12. $\int \tan^3(\theta)\sec^2(\theta)\,d\theta.$
13. $\int \frac{dy}{\sqrt{7y+5}}.$
14. $\int \frac{\cos(\sqrt{y})}{\sqrt{y}}\,dy.$
15. $\int \frac{w^2}{(w^3+5)^4}\,dw.$

1.2.2. Método de integración por partes. En esta sección desarrollaremos un método de integración el cual nos permitirá, en muchos casos, resolver integrales de un grado de dificultad mayor a las estudiadas hasta ahora. El método, llamado integración por partes, nos permitirá reemplazar una integral dada por otra que esperamos sea más sencilla de calcular que la primera. El método de integración por partes está basado en la regla de derivación del producto, la cual establece para funciones diferenciables que

$$\frac{d}{dx}\left[f(x)g(x)\right] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Por lo tanto, tenemos que

$$\begin{aligned}\int \frac{d}{dx}\left[f(x)g(x)\right]\,dx &= \int (f'(x)g(x) + f(x)g'(x))\,dx\\ &= \int f'(x)g(x)\,dx + \int f(x)g'(x)\,dx,\end{aligned}$$

o equivalentemente,

$$\int f(x)g'(x)\,dx = \int \frac{d}{dx}\left[f(x)g(x)\right]\,dx - \int f'(x)g(x)\,dx.$$

Dado que por definición se tiene que fg es una antiderivada de $(fg)'$, entonces

$$\int \frac{d}{dx}\left[f(x)g(x)\right]\,dx = f(x)g(x) + c.$$

De modo que incluyendo la constante c en una de las integrales indefinidas, podemos escribir la siguiente fórmula denominada integración por partes,

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx.$$

Más aún, si realizamos las sustituciones $u = f(x)$ y $v = g(x)$, entonces obtenemos que

$$du = f'(x)\,dx \quad \text{y} \quad dv = g'(x)\,dx.$$

Reemplazando en la integral anterior obtenemos la denominada **fórmula de integración por partes**

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du. \tag{1.10}$$

La fórmula de integración por partes se debe interpretar como una manera de cambiar la integral $\displaystyle\int udv$ por la integral $\displaystyle\int vdu$. En ocasiones, dependiendo de una apropiada escogencia, la segunda integral en la fórmula de integración por partes (1.10) es más simple de calcular que la primera integral.

Para entender como funciona la fórmula de integración por partes para el cálculo de una integral indefinida de la forma $\displaystyle\int h(x)\,dx$, es necesario definir funciones u y v de tal forma que $h(x)\,dx$ se pueda descomponer de la siguiente forma:

$$h(x)\,dx = u\,dv.$$

Note que esta descomposición requiere conocer la función v dado que en el lado derecho de la fórmula de integración por partes (1.10) es necesario calcular el producto $u \cdot v$ y la integral indefinida $\displaystyle\int v\,du$. Por lo tanto, la escogencia de las funciones u y v debe hacerse de tal forma que:

* sea fácil calcular la integral indefinida $v = \displaystyle\int dv$, y que
* la integral indefinida $\displaystyle\int v\,du$ sea más sencilla de calcular que la integral indefinida $\displaystyle\int u\,dv$.

Ejemplos 1.17. 1.- Calcular la integral indefinida $I = \displaystyle\int x\cos(x)\,dx$.

Solución. Para calcular la integral definida vamos a utilizar la fórmula de integración por partes. Como hemos discutido, para utilizar la fórmula de integración debemos primero determinar la función v mediante la integral indefinida $v = \displaystyle\int dv$. En este caso, podemos realizar las sustituciones $u = x$ y $dv = \cos(x)\,dx$. Entonces, $du = dx$ y $v = \operatorname{sen}(x)$. Por lo tanto, utilizando la fórmula de integración por partes tenemos que

$$\int x\cos x\,dx = x\operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x\,dx = x\operatorname{sen} x + \cos x + c.$$

Los siguientes ejemplos ilustran la necesidad de escoger de una manera conveniente las funciones u y v con el fin de no llegar a integrales de mayor complejidad que la inicial.

2.- Calcular la integral indefinida $I = \int xe^{2x}\,dx$.

Solución. De nuevo utilicemos la fórmula de integración por partes. Recordemos que la escogencia más importante es dv pues $v = \int dv$.

Sustitución 1. Tomemos por ejemplo $dv = x\,dx$ y $u = e^{2x}$. De modo que $\int xe^{2x}\,dx = \int u\,dv$. En este caso,

$$v = \int dv = \int x\,dx = \frac{1}{2}x^2 \quad \text{y} \quad du = 2e^{2x}\,dx.$$

Utilizando la fórmula de integración por partes encontramos que

$$\begin{aligned}\int xe^{2x}\,dx = \int u\,dv &= uv - \int v\,du \\ &= \frac{1}{2}x^2e^{2x} - 2\left(\frac{1}{2}\right)\int x^2e^{2x}\,dx.\end{aligned}$$

Note que la "nueva" integral resultó del mismo tipo, pero relativamente más complicada que la integral inicial. Esto no significa que se haya cometido algún error sino que la sustitución no era la apropiada.

Sustitución 2. Tomemos $dv = e^{2x}\,dx$ y $u = x$. De modo que $\int xe^{2x}\,dx = \int u\,dv$. En este caso,

$$v = \int dv = \int e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}e^{2x} \quad \text{y} \quad du = dx.$$

Utilizando la fórmula de integración por partes encontramos que

$$\begin{aligned}\int xe^{2x}\,dx = \int u\,dv &= uv - \int v\,du \\ &= \frac{1}{2}xe^{2x} - \left(\frac{1}{2}\right)\int e^{2x}\,dx \\ &= \frac{1}{2}xe^{2x} - \left(\frac{1}{4}\right)e^{2x} + C.\end{aligned}$$

3.- Calcular la integral indefinida $I = \int x^2e^{-x}dx$.

Solución. Recordemos que debemos realizar la descomposición $\int x^2 e^{-x}\,dx = \int u\,dv$. Consideremos las sustituciones $u = x^2$ y $dv = e^{-x}\,dx$. Entonces $du = 2x\,dx$ y $v = \int dv = \int e^{-x}\,dx = -e^{-x}$. Por lo tanto, utilizando la fórmula de integración por partes encontramos que

$$\int x^2 e^{-x}\,dx = -x^2 e^{-x} + 2\int x e^{-x}\,dx.$$

Notemos que la integral $\int x e^{-x}\,dx$, se puede calcular de igual forma utilizando integración por partes. En este caso, hagamos $u = x$ y $dv = e^{-x}\,dx$. Entonces tenemos que $du = dx$ y que $v = -e^{-x}$ (ver arriba). En consecuencia,

$$\begin{aligned}
\int x^2 e^{-x}\,dx &= -x^2 e^{-x} + 2\int x e^{-x}\,dx \\
&= -x^2 e^{-x} + 2\left(-x e^{-x} + \int e^{-x}\,dx\right) \\
&= -x^2 e^{-x} - 2x e^{-x} - 2e^{-x} + C \\
&= -e^{-x}(x^2 + 2x + 2) + C.
\end{aligned}$$

4.- Calcular la integral indefinida $I = \int t^2 \ln(t)\,dt$.

Solución. En este tipo de integrales la mejor sustitución es $u = \ln(t)$ pues $du = \frac{1}{t}\,dt$. En este caso tenemos que $dv = t^2\,dt$. Por tanto, $v = \frac{1}{3}t^3$. Reemplazando en la fórmula de integración por partes tenemos que,

$$\begin{aligned}
\int t^2 \ln(t)\,dt &= \frac{1}{3}t^3 \ln(t) - \int \left(\frac{1}{3}t^3.\frac{1}{t}\right) dt \\
&= \frac{1}{3}t^3 \ln(t) - \frac{1}{3}\int t^2 dt \\
&= \frac{1}{3}t^3 \ln(t) - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}t^3\right) + C \\
&= \frac{1}{3}t^3\left(\ln(t) - \frac{1}{3}\right) + C.
\end{aligned}$$

5.- Calcular la integral indefinida $I = \int v^3\sqrt{1 - v^2}\,dv$.

Solución. Consideremos primero la sustitución más simple. $dw = v^3\,dv$ y $u = \sqrt{1 - v^2}$. Entonces obtenemos directamente que

$$du = \frac{-v}{\sqrt{1 - v^2}}\,dv \quad \text{ y } \quad w = \frac{v^4}{4}.$$

Utilizando la fórmula de integración por partes,

$$
\begin{aligned}
\int v^3\sqrt{1-v^2}\,dv &= uw - \int u\,dw \\
&= \frac{v^4\sqrt{1-v^2}}{4} + \int \frac{v^4}{4}\frac{v}{\sqrt{1-v^2}}\,dv \\
&= \frac{v^4\sqrt{1-v^2}}{4} + \int \frac{v^5}{4\sqrt{1-v^2}}\,dv.
\end{aligned}
$$

Recordemos que el objetivo de utilizar la fórmula de integración por partes consiste en transformar la integral inicial por una integral "más simple". Notemos que la integral de la derecha tiene la misma estructura de la integral de la izquierda, e inclusive parece mucho más difícil. Lo anterior muestra que es necesario efectuar varios intentos antes de encontrar la sustitución apropiada.

Ahora consideremos otra posible sustitución. Tomemos $dw = v\sqrt{1-v^2}\,dv$ y $u = v^2$. Entonces,

$$
du = 2v\,dv \qquad \text{y} \qquad w = -\frac{1}{3}(1-v^2)^{3/2}.
$$

Utilizando la fórmula de integración por partes,

$$
\begin{aligned}
\int v^3\sqrt{1-v^2}\,dv &= uw - \int u\,dw \\
&= -\frac{1}{3}v^2(1-v^2)^{3/2} + \frac{2}{3}\int v(1-v^2)^{3/2}\,dv \\
&= -\frac{1}{3}v^2(1-v^2)^{3/2} - \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{5}\right)(1-v^2)^{5/2} + C \\
&= -\frac{1}{3}v^2(1-v^2)^{3/2} - \frac{2}{15}(1-v^2)^{5/2} + C.
\end{aligned}
$$

Observación 1.18. Esta integral también se puede calcular utilizando una sustitución directa. En efecto, consideremos la sustitución $z = 1-v^2$. Entonces, $dz = -2v\,dv$. Por lo tanto,

$$
\begin{aligned}
\int v^3\sqrt{1-v^2}\,dv &= \int v^2\sqrt{1-v^2}v\,dv \\
&= \int (1-z)z^{1/2}\left(-\frac{1}{2}\,dz\right) = -\frac{1}{2}\int (z^{1/2}-z^{3/2})\,dz \\
&= -\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}z^{3/2} - \frac{2}{5}z^{5/2}\right) + C \\
&= -\frac{1}{3}(1-v^2)^{3/2} + \frac{1}{5}(1-v^2)^{5/2} + C.
\end{aligned}
$$

Verifica que en realidad estas respuestas son iguales.

Ejercicios

1.- Utilice la integración por partes para calcular las integrales de los siguientes problemas.

a) $\int ye^{2y}\,dy$.

b) $\int w\,\mathrm{sen}(w)\,dw$.

c) $\int r\cos(3r)\,dr$.

d) $\int s^3\ln(s)\,ds$.

e) $\int \arctan y\,dy$.

f) $\int \sqrt{y}\ln y\,dy$.

g) $\int (\ln z)^2\,dz$.

h) $\int t\sqrt{t+3}\,dt$.

i) $\int x^5\sqrt{x^3+1}\,dx$.

j) $\int \csc^3(\theta)\,d\theta$.

k) $\int l^2\arctan(l)\,dl$.

l) $\int \sec^{-1}(\sqrt{t})\,dt$.

m) $\int \tan^{-1}(\sqrt{k})\,dk$.

n) $\int m\csc^2(m)\,dm$.

ñ) $\int t^3\cos(t^2)\,dt$.

o) $\int \frac{\ln r}{r\sqrt{r}}\,dr$.

p) $\int w\cos(hw)\,dw$.

q) $\int z^2\,\mathrm{sen}(nz)\,dz$.

2.- Utilice integración por partes para verificar las siguientes fórmulas

a) $\int t^n e^t\,dt = t^n e^t - n\int t^{n-1}e^t\,dt$.

b) $\int (\ln t)^n\,dt = t(\ln t)^n - n\int (\ln t)^{n-1}\,dt$.

c) $\int (\cos(t))^n\,dt = \frac{(\cos(t))^{n-1}\,\mathrm{sen}(t)}{n} + \frac{n-1}{n}\int (\cos(t))^{n-2}\,dt$.

d) $\int t^n\cos(t)dt = t^n\,\mathrm{sen}\,t - n\int t^{n-1}\,\mathrm{sen}(t)\,dt$.

e) $\int (\mathrm{sen}(t))^n\,dt = -\frac{(\mathrm{sen}(t))^{n-1}\cos(t)}{n} + \frac{n-1}{n}\int (\mathrm{sen}(t))^{n-2}\,dt$.

f) $\int t^n e^{-t^2}\,dt = \frac{1}{2}t^{n-1}e^{-t^2} + \frac{n-1}{2}\int t^{n-2}e^{-t^2}\,dt$.

3.- Las siguientes expresiones tienen la forma $c\cdot u(x)\cdot v'(x)\,dx$, para unas ciertas funciones u y v, y una constante apropiada $c\in\mathbb{R}$. Exhiba u, v y c, y escriba la expresión $d\cdot u'(x)\cdot v(x)\,dx$ con $d\in\mathbb{R}$ en cada caso.

a) $x\cos(3x)\,dx$. b) $\arctan(x)\,dx$. c) $e^{2x}\operatorname{sen}(4x)\,dx$.

d) $\dfrac{\ln(x)}{x^2}\,dx$. e) $\dfrac{x}{e^{2x}}\,dx$. f) $e^{s}\operatorname{sen}(t-x)\,dx$.

g) $(x^2+1)e^{-x}\,dx$. h) $\cos(x)\ln(\operatorname{sen}(x))\,dx$.

1.2.3. Integrales trigonométricas. En esta sección estamos interesados en calcular antiderivadas o integrales indefinidas que contengan productos de potencias de las funciones $\operatorname{sen}(x)$ y $\cos(x)$, o de las funciones $\sec(x)$ y $\tan(x)$, o de las funciones $\csc(x)$ y $\cot(x)$.

El método está basado en el hecho de que las derivadas de las funciones trigonométricas son también funciones trigonométricas del mismo tipo y el uso de las identidades trigonométricas:

$$\operatorname{sen}^2(x)+\cos^2(x)=1 \qquad \text{y} \qquad 1+\tan^2(x)=\sec^2(x).$$

De otro lado utilizando la fórmula para ángulos dobles, también tenemos que

$$\cos^2(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(2x) \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen}^2(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(2x).$$

I.- Integrales de la forma $\displaystyle\int \operatorname{sen}^m(x)\cos^n(x)\,dx$.

Vamos a dividir la discusión sobre el cálculo de este tipo de integrales en dos casos, dependiendo de si m y n son pares o impares.

Caso I.- Integrales de la forma $\displaystyle\int \operatorname{sen}^m(x)\cos^n(x)\,dx$ con m o n impar.

Iniciemos la discusión tomando m es impar. Por lo tanto, podemos escribir $m=2k+1$ para algún entero positivo k. En consecuencia, $\operatorname{sen}^m(z)$ se puede descomponer de la siguiente forma

$$\operatorname{sen}^{2k+1}(z)=\operatorname{sen}^{2k}(z)\operatorname{sen}(z)=(\operatorname{sen}^2(z))^k\operatorname{sen}(z)=(1-\cos^2(z))^k\operatorname{sen}(z).$$

Por lo tanto, podemos efectuar la sustitución $u=\cos(z)$ y $du=-\operatorname{sen}(z)dz$.

De forma análoga, si n es impar, entonces podemos escribir $n=2j+1$ para algún entero positivo j. De modo que $\cos^n(z)$ se puede expresar como

$$\cos^{2j+1}(z)=\cos^{2j}(z)\cos(z)=(\cos^2(z))^j\cos(z)=(1-\operatorname{sen}^2(z))^j\cos(z).$$

Por lo tanto, podemos efectuar la sustitución $u=\operatorname{sen}(z)$ y $du=\cos z\,dz$.

Como se puede observar, este tipo de integrales se transforman en integrales polinómicas cuando los exponentes son números naturales.

Ejemplos 1.19. Encuentre las siguientes integrales trigonométricas:

1.- $\displaystyle\int \operatorname{sen}^5(z)\cos^3(z)\,dz$.

En primer lugar recordemos la identidad trigonométrica básica $\operatorname{sen}^2(x)+\cos^2(x)=1$. Entonces

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^5(z)\cos^3(z)\,dz &= \int \operatorname{sen}^4(z)\cos^3(z)\operatorname{sen}(z)\,dz\\ &= \int (\operatorname{sen}^2(z))^2\cos^3(z)\operatorname{sen}(z)\,dz\\ &= \int (1-\cos^2(z))^2\cos^3(z)\operatorname{sen}(z)\,dz.\end{aligned}$$

Definiendo $u=\cos z$ encontramos que $du=-\operatorname{sen} z\,dz$, y

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^5(z)\cos^3(z)\,dz &= \int (1-\cos^2(z))^2\cos^3(z)\operatorname{sen}(z)\,dz = -\int (1-u^2)^2u^3\,du\\ &= -\int (u^3-2u^5+u^7)\,du = -\frac{1}{4}u^4+\frac{1}{3}u^6-\frac{1}{8}u^8+C\\ &= -\frac{1}{4}\cos^4 z+\frac{1}{3}\cos^6 z-\frac{1}{8}\cos^8 z+C.\end{aligned}$$

Note que en este caso también pudimos haber descompuesto la potencia de la función $\cos z$ y haber utilizado la sustitución $u=\operatorname{sen} z$. Es decir,

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^5(z)\cos^3(z)\,dz &= \int \operatorname{sen}^5(z)\cos^2(z)\cos(z)\,dz\\ &= \int \operatorname{sen}^5(z)(1-\operatorname{sen}^2(z))\cos(z)\,dz = \int u^5(1-u^2)\,du\\ &= \frac{1}{6}u^6-\frac{1}{8}u^8+C\\ &= \frac{1}{6}\operatorname{sen}^6 z-\frac{1}{8}\operatorname{sen}^8 z+C.\end{aligned}$$

2.- $\displaystyle\int \operatorname{sen}^{\frac{3}{2}}(z)\cos^7(z)\,dz$. Observemos que

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^{\frac{3}{2}}(z)\cos^7(z)\,dz &= \int \operatorname{sen}^{\frac{3}{2}}(z)\cos^6(z)\cos(z)\,dz\\ &= \int \operatorname{sen}^{\frac{3}{2}}(z)(\cos^2(z))^3\cos(z)\,dz\\ &= \int \operatorname{sen}^{\frac{3}{2}}(z)(1-\operatorname{sen}^2(z))^3\cos(z)\,dz\\ &= \int u^{\frac{3}{2}}(1-u^2)^3\,du \quad (u=\operatorname{sen}(z),\quad du=\cos(z)\,dz)\\ &= \int u^{\frac{3}{2}}(1-3u^2+3u^4-u^6)\,du\\ &= \frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{9}u^{\frac{9}{2}}+\frac{2}{13}u^{\frac{13}{2}}-\frac{2}{17}u^{\frac{17}{2}}+c.\end{aligned}$$

En resumen,

$$\begin{aligned}&\int \operatorname{sen}^{\frac{3}{2}}(z)\cos^7(z)\,dz\\ &\qquad= \frac{2}{5}(\operatorname{sen}(z))^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{9}(\operatorname{sen}(z))^{\frac{9}{2}}+\frac{2}{13}(\operatorname{sen}(z))^{\frac{13}{2}}-\frac{2}{17}(\operatorname{sen}(z))^{\frac{17}{2}}+c.\end{aligned}$$

Caso II.- Integrales de la forma $\displaystyle\int \operatorname{sen}^m(x)\cos^n(x)\,dx$ con m y n pares.

En el caso en que m y n sean simultáneamente pares, vamos a expresar $\operatorname{sen}^2(z)$ y $\cos^2(z)$ en términos de las función $\cos(2k)(z)$, para algunos enteros k. Para descomponer potencias trigonométricas pares es conveniente recordar las siguientes identidades trigonométricas

$$\cos^2(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(2x) \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen}^2(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(2x).$$

Estas identidades nos permiten reducir el orden a la mitad el orden de potencias pares de seno y coseno, pero en términos del ángulo doble. Note en particular que cualquier potencia par de las funciones $\operatorname{sen}(x)$ y $\cos(x)$ se pueden expresar en términos de las función $\cos((2k)x)$, para algunos enteros k. Por ejemplo,

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}^4(z) = \left(\operatorname{sen}^2(z)\right)^2 &= \left(\frac{1}{2}\left(1-\cos 2(z)\right)\right)^2\\ &= \frac{1}{4}\left(1-2\cos(2z)+\cos^2(2z)\right).\end{aligned}$$

Utilizando que $\cos^2(2z) = \frac{1}{2}\left(1+\cos(4z)\right)$, concluimos que

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}^4(z) &= \frac{1}{4}\left(1 - 2\cos(2z) + \frac{1}{2}\left(1+\cos(4z)\right)\right)\\ &= \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos(2z) + \frac{1}{8}\cos(4z).\end{aligned}$$

Además debemos recordar las siguientes identidades

$$\begin{aligned}\cos(a \pm b) &= \cos(a)\cos(b) \mp \operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b),\\ \operatorname{sen}(a \pm b) &= \operatorname{sen}(a)\cos(b) \pm \cos(a)\operatorname{sen}(b).\end{aligned}$$

Utilizando estas fórmulas se puede ver directamente que

$$2\cos(a)\cos(b) = \cos(a+b) + \cos(a-b),$$

$$2\operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b) = \cos(a-b) - \cos(a+b).$$

Ejemplos 1.20. Encuentre las siguientes integrales indefinidas:

1.- $\displaystyle\int \cos^2 z\,dz$.

Recordemos que $\cos^2 z = \frac{1}{2}\left(1+\cos 2z\right)$. Por lo tanto,

$$\int \cos^2 z\,dz = \frac{1}{2}\int (1+\cos 2z)\,dz = \frac{1}{2}z + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2z + C.$$

2.- $\displaystyle\int \operatorname{sen}^4 z\,dz$.

De la discusión previa se tiene que $\operatorname{sen}^4 z = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2z + \frac{1}{8}\cos 4z$. Entonces,

$$\int \operatorname{sen}^4 z dz = \int \left[\frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2z + \frac{1}{8}\cos 4z\right] dz = \frac{3}{8}z - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2z + \frac{1}{32}\operatorname{sen} 4z + C.$$

3.- $\displaystyle\int \operatorname{sen}^4 z\cos^2 z\,dz$.

Del ejemplo anterior tenemos que $\operatorname{sen}^4 z = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2z + \frac{1}{8}\cos 4z$. Además $\cos^2 z = \frac{1}{2}\left(1+\cos 2z\right)$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}^4 z\cos^2 z &= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2z + \frac{1}{8}\cos 4z\right)(1+\cos 2z)\\ &=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{8} - \frac{1}{8}\cos 2z - \frac{1}{2}\cos^2 2z + \frac{1}{8}\cos 4z + \frac{1}{8}(\cos 2z)(\cos 4z)\right).\end{aligned}$$

Pero $\cos^2 2z = \frac{1}{2}(1+\cos 4z)$ y tomando en las fórmulas anteriores $a = 4z$, $b = 2z$, tenemos que $2\cos(2z)\cos(4z) = \cos 6z + \cos 2z$. En consecuencia,

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}^4 z \cos^2 z &= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{8} - \frac{1}{8}\cos 2z - \frac{1}{2}\cos^2 2z + \frac{1}{8}\cos 4z + \frac{1}{8}(\cos 2z)(\cos 4z)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\cos 2z - \frac{1}{8}\cos 4z + \frac{1}{16}(\cos 6z + \cos 2z)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{16}\cos 2z - \frac{1}{8}\cos 4z + \frac{1}{16}\cos 6z\right).
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^4 z \cos^2 z \, dz &= \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{16}\cos 2z - \frac{1}{8}\cos 4z + \frac{1}{16}\cos 6z\right) dz \\
&= \frac{1}{16}z - \frac{1}{64}\operatorname{sen} 2z - \frac{1}{64}\operatorname{sen} 4z + \frac{1}{192}\operatorname{sen} 6z + C.
\end{aligned}$$

II.- Integrales de la forma $\displaystyle\int \sec^m(x)\tan^n(x)\,dx$.

El análisis de este tipo de integrales se reduce a considerar tres casos: a) m par, b) n impar, y c) m impar y n par.

Caso I. Integrales de la forma $\displaystyle\int \sec^m(x)\tan^n(x)\,dx$ **con** m **par.**

En este caso escribimos

$$\sec^m x \tan^n(x) = \sec^{m-2}(x)\tan^n(x)\sec^2(x).$$

De esta forma tenemos que $m-2$ es entero par. Ahora, utilizando la identidad trigonométrica $\sec^2(x) = \tan^2(x) + 1$ vemos que la expresión $\sec^{m-2}(x)$ se puede descomponer como

$$\sec^{m-2}(x) = (\sec^2(x))^{\frac{m-2}{2}} = (\tan^2(x)+1)^{\frac{m-2}{2}}.$$

En resumen,

$$\begin{aligned}
\int \sec^m(x)\tan^n(x)\,dx &= \int \sec^{m-2}(x)\tan^n(x)\sec^2(x)\,dx \\
&= \int (\sec^2(x))^{\frac{m-2}{2}}\tan^n(x)\sec^2(x)\,dx \\
&= \int (\tan^2(x)+1)^{\frac{m-2}{2}}\tan^n(x)\sec^2(x)dx,
\end{aligned}$$

donde debemos recordar que $\frac{m-2}{2}$ es un número entero positivo. Haciendo la sustitución $u = \tan(x)$, entonces $du = \sec^2(x)\,dx$. Por lo tanto la integral se puede resolver fácilmente.

Ejemplo 1.21. Calcule la integral $\displaystyle\int \sec^4(x)\tan^4(x)\,dx$.

Solución.

$$\begin{aligned}\int \sec^4(x)\tan^4(x)\,dx &= \int \sec^2(x)\tan^4(x)\sec^2(x)\,dx\\ &= \int (\tan^2(x)+1)\tan^4(x)\sec^2(x)\,dx.\end{aligned}$$

Haciendo la sustitución $u=\tan(x)$, se tiene que $du=\sec^2(x)dx$. Por lo tanto tenemos que

$$\begin{aligned}\int \sec^4 x\tan^4 x\,dx = \int (\tan^2 x+1)\tan^4 x\sec^2 x\,dx &= \int (u^2+1)u^4du\\ &= \int (u^6+u^4)du\\ &= \frac{1}{7}u^7+\frac{1}{5}u^5+C\\ &= \frac{1}{7}\tan^7 x+\frac{1}{5}\tan^5 x+C.\end{aligned}$$

Caso II. Integrales de la forma $\displaystyle\int \sec^m(x)\tan^n(x)\,dx$ con n impar.

En este caso escribimos

$$\sec^m(x)\tan^n(x)=\sec^{m-1}(x)\tan^{n-1}(x)\sec(x)\tan(x).$$

De esta forma tenemos que $n-1$ es par. Utilizando la identidad trigonométrica $\tan^2(x)=\sec^2(x)-1$, la expresión $\tan^{n-1}(x)$ se puede descomponer como

$$\tan^{n-1}(x)=(\tan^2(x))^{\frac{n-1}{2}}=(\sec^2(x)-1)^{\frac{n-1}{2}},$$

donde debemos recordar que $\frac{n-1}{2}$ es un número entero positivo. Así que

$$\begin{aligned}\int \sec^m(x)\tan^n(x)\,dx &= \int \sec^{m-1}(x)\tan^{n-1}(x)\sec(x)\tan(x)\,dx\\ &= \int \sec^{m-1}(x)(\sec^2(x)-1)^{\frac{n-1}{2}}\sec(x)\tan(x)\,dx.\end{aligned}$$

Si hacemos la sustitución $u=\sec(x)$, tenemos que $du=\sec x\tan x dx$. Así la integral se puede encontrar relativamente fácil.

Ejemplo 1.22. Calcule la integral $\int \sec^5 x \tan^3 x\, dx$.
Solución.

$$\begin{aligned}\int \sec^5(x)\tan^3(x)\,dx &= \int \sec^4(x)\tan^2(x)\sec(x)\tan(x)\,dx\\ &= \int \sec^4(x)(\sec^2(x)-1)\sec(x)\tan(x)\,dx.\end{aligned}$$

Haciendo la sustitución $u = \sec(x)$ tenemos que $du = \sec(x)\tan(x)dx$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}\int \sec^5(x)\tan^3(x)\,dx &= \int \sec^4(x)(\sec^2(x)-1)\sec(x)\tan(x)\,dx\\ &= \int u^4(u^2-1)du\\ &= \int (u^6-u^4)du\\ &= \frac{1}{7}\sec^7(x) - \frac{1}{5}\sec^5(x) + C.\end{aligned}$$

Caso III. Integrales de la forma $\int \sec^m(x)\tan^n(x)\,dx$ **con** m **impar y** n **par.**

En este caso la sustitución trigonométrica $\tan^2(x) = \sec^2(x) - 1$ transforma la integral en una suma de integrales del tipo $\int \sec^k(x)dx$, las cuales se pueden resolver de forma recursiva en integrales de la misma forma, pero con exponente menor. En efecto,

$$\sec^m x \tan^n(x) = \sec^m(x)(\tan^2(x))^{\frac{n}{2}} = \sec^m(x)(\sec^2(x)-1)^{\frac{n}{2}},$$

lo cual es una suma de términos de la forma $\sec^l(x)$ con l entero positivo, dado que $\frac{n}{2}$ es un entero positivo.

En este caso vamos a utilizar el método de integración por parte para calcular las integrales de la forma $\int \sec^k(x)dx$.

Supongamos que $k \geq 3$. Entonces

$$\sec^k(x) = \sec^{k-2}(x)\sec^2(x).$$

Si tomamos $u = \sec^{k-2}(x)$ y $dv = \sec^2(x)\,dx$. Entonces,

$$du = (k-2)\sec^{k-3}(x)\sec(x)\tan(x) = (k-2)\sec^{k-2}(x)\tan(x), \qquad v = \tan(x).$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\int \sec^k(x)dx &= \int \sec^{k-2}(x)\sec^2(x)\,dx\\ &= \sec^{k-2}(x)\tan(x) - (k-2)\int \sec^{k-2}(x)\tan^2(x)\,dx\\ &= \sec^{k-2}(x)\tan(x) - (k-2)\int \sec^{k-2}(x)(\sec^2(x)-1)\,dx.\end{aligned}$$

Como consecuencia concluimos que

$$\int \sec^k(x)dx = \sec^{k-2}(x)\tan(x) - (k-2)\int \sec^k(x)\,dx + (k-2)\int \sec^{k-2}(x)\,dx.$$

Agrupando adecuadamente concluimos que

$$(k-1)\int \sec^k(x)dx = \sec^{k-2}(x)\tan(x) + (k-2)\int \sec^{k-2}(x)\,dx,$$

lo cual es equivalente a la fórmula recursiva

$$\int \sec^k(x)dx = \frac{1}{k-1}\sec^{k-2}(x)\tan(x) + \left(\frac{k-2}{k-1}\right)\int \sec^{k-2}(x)\,dx.$$

Por ejemplo,

$$\begin{aligned}\int \sec^3(x)dx &= \frac{1}{2}\sec(x)\tan(x) + \frac{1}{2}\int \sec(x)\,dx\\ &= \frac{1}{2}\sec(x)\tan(x) + \frac{1}{2}\ln(\tan(x)+\sec(x)) + C.\end{aligned}$$

Ejemplo 1.23. 1.- Calcular la integral $\int \sec(x)\tan^2(x)dx$.

Solución.

$$\begin{aligned}\int \sec(x)\tan^2(x)dx &= \int \sec(x)(\sec^2(x)-1)\,dx\\ &= \int (\sec^3(x)-\sec(x))\,dx\\ &= \frac{1}{2}\sec(x)\tan(x) + \frac{1}{2}\ln(\tan(x)+\sec(x))\\ &\quad - \ln(\tan(x)+\sec(x)) + C\\ &= \frac{1}{2}\sec(x)\tan(x) - \frac{1}{2}\ln(\tan(x)+\sec(x)) + C.\end{aligned}$$

2.- Calcular la integral $\displaystyle\int \sec^3(x)\tan^2(x)dx$.

Solución. Vamos a utilizar la fórmula recursiva con $k = 5$ y $k = 3$.

$$\int \sec^3(x)\tan^2(x)dx = \int \sec^3(x)(\sec^2(x) - 1)\,dx = \int (\sec^5(x) - \sec^3(x))\,dx.$$

Notemos que

$$\int \sec^5(x)dx = \frac{1}{4}\sec^3(x)\tan(x) - \frac{3}{4}\int \sec^3(x))dx.$$

Por lo tanto, utilizando los cálculos anteriores tenemos finalmente que

$$\begin{aligned}\int \sec^3(x)\tan^2(x)dx &= \frac{1}{4}\sec^3(x)\tan(x) - \frac{7}{4}\int \sec^3(x)\,dx\\ &= \frac{1}{4}\sec^3(x)\tan(x) - \frac{7}{8}\sec(x)\tan(x)\\ &\quad - \frac{7}{8}\ln(\tan(x) + \sec(x)) + C.\end{aligned}$$

III.- Integrales de la forma $\displaystyle\int \csc^m(x)\cot^n(x)\,dx$.

Estas integrales se tratan de manera similar a como se hizo con las integrales de la forma $\displaystyle\int \csc^m(x)\cot^n(x)\,dx$.

Caso I: Integrales de la forma $\displaystyle\int \csc^m(x)\cot^n(x)\,dx$ con m par.

En este caso escribimos

$$\csc^m(x)\cot^n(x) = \csc^{m-2}(x)\cot^n(x)\csc^2(x).$$

De esta forma tenemos que $m - 2$ es par y usando la identidad trigonométrica básica $\csc^2(x) = \cot^2(x) + 1$, podemos descomponer la expresión $\csc^{m-2}(x)$ como

$$\csc^{m-2}(x) = (\csc^2(x))^{\frac{m-2}{2}} = (\cot^2(x) + 1)^{\frac{m-2}{2}}.$$

Utilizando esto concluimos que

$$\begin{aligned}\int \csc(x)\cot^n(x)\,dx &= \int \csc(x)\cot^n(x)\csc^2(x)\,dx\\ &= \int (\csc^2(x))^{\frac{m-2}{2}}\cot^n(x)\csc^2(x)dx\\ &= \int (\cot^2(x) + 1)^{\frac{m-2}{2}}\cot^n(x)\csc^2(x)dx.\end{aligned}$$

Haciendo la sustitución $u = \cot(x)$ entonces $du = -\csc^2(x)\,dx$, y la integral se puede calcular fácilmente.

Ejemplo 1.24. Calcular la integral $\int \csc^4 x \cot^4 x\, dx$.

Solución.

$$\int \csc^4 x \cot^4 x\, dx = \int \csc^2 x \cot^4 x \csc^2 x\, dx = \int (\cot^2 x + 1) \cot^4 x \csc^2 x\, dx.$$

Haciendo la sustitución $u = \cot(x)$ entonces $du = -\csc^2(x)\, dx$, y obtenemos que

$$\begin{aligned}\int \csc^4(x) \cot^4(x)\, dx &= \int (\cot^2(x) + 1) \cot^4(x) \csc^2(x)\, dx \\ &= -\int (u^2+1)u^4 du \\ &= -\int (u^6 + u^4) du \\ &= -\frac{1}{7}u^7 - \frac{1}{5}u^5 + C \\ &= -\frac{1}{7}\cot^7(x) - \frac{1}{5}\cot^5(x) + C.\end{aligned}$$

Caso II: Integrales de la forma $\int \csc^m(x) \cot^n(x)\, dx$ con n impar.

En este caso escribimos

$$\csc^m(x) \cot^n(x) = \csc^{m-1}(x) \cot^{n-1}(x) \csc(x) \cot(x).$$

De esta forma se tendrá que $n-1$ es par y usando la identidad $\cot^2(x) = \csc^2(x) - 1$, la expresión $\cot^{n-1}(x)$ se podrá escribir como

$$\cot^{n-1}(x) = (\cot^2(x))^{\frac{n-1}{2}} = (\csc^2(x) - 1)^{\frac{n-1}{2}}.$$

Así concluimos que

$$\begin{aligned}\int \csc^m(x) \cot^n(x)\, dx &= \int \csc^{m-1}(x) \cot^{n-1}(x) \csc(x) \cot(x) dx \\ &= \int \csc^{m-1}(x)(\csc^2(x) - 1)^{\frac{n-1}{2}} \csc(x) \cot(x) dx.\end{aligned}$$

Haciendo la sustitución $u = \csc(x)$ y utilizando que $du = -\csc(x)\cot(x)\, dx$, la integral se vuelve más fácil de resolver.

Ejemplo 1.25. Calcular la integral $\int \csc^3(x) \cot^5(x)\, dx$.

Solución. En este caso el exponente de $\cot(x)$ es impar, por tanto procedemos de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\int \csc^3(x)\cot^5(x)\,dx &= \int \csc^2(x)\cot^4(x)\csc(x)\cot(x)\,dx\\ &= \int \csc^2(x)(\csc^2(x)-1)^2\csc(x)\cot(x)\,dx.\end{aligned}$$

Haciendo la sustitución $u = \csc(x)$ encontramos que $du = -\csc(x)\cot(x)dx$ y tendremos que

$$\begin{aligned}\int \csc^3(x)\cot^5(x)\,dx &= \int \csc^2(x)(\csc^2(x)-1)^2\csc(x)\cot(x)\,dx\\ &= -\int u^2(u^2-1)^2du\\ &= -\int u^2(u^4-2u^2+1)du\\ &= -\int (u^6-2u^4+u^2)du\\ &= -\frac{1}{7}\csc^7(x)+\frac{1}{5}\csc^5(x)-\frac{1}{3}\csc^3(x)+C.\end{aligned}$$

Caso III: Integrales de la forma $\int \csc^m(x)\cot^n(x)\,dx$ **con** m **impar y** n **par.**

En este caso la sustitución trigonométrica $\cot^2(x) = \csc^2(x) - 1$ transforma la integral en una suma de integrales del tipo $\int \csc^k(x)dx$, las cuales se pueden resolver de forma recursiva en integrales de la misma forma, pero con exponente menor. En efecto,

$$\csc^m x\cot^n(x) = \csc^m(x)(\cot^2(x))^{\frac{n}{2}} = \csc^m(x)(\csc^2(x)-1)^{\frac{n}{2}},$$

lo cual es una suma de términos de la forma $\csc^l(x)$ con l entero positivo, dado que $\frac{n}{2}$ es un entero positivo.

En este caso vamos a utilizar el método de integración por parte para calcular las integrales de la forma $\int \csc^k(x)dx$. Supongamos que $k \geq 3$. Observemos que $\csc^k(x) = \csc^{k-2}(x)\csc^2(x)$. Si tomamos $u = \csc^{k-2}(x)$ y $dv = \csc^2(x)dx$, entonces tenemos que $v = -\cot(x)$ y que

$$du = -(k-2)\csc^{k-3}(x)\csc(x)\cot(x) = -(k-2)\csc^{k-2}(x)\cot(x).$$

Por lo tanto, substituyendo obtenemos que

$$\begin{aligned}\int \csc^k(x)dx &= \int \csc^{k-2}(x)\csc^2(x)\,dx\\ &= -\csc^{k-2}(x)\cot(x) - (k-2)\int \csc^{k-2}(x)\cot^2(x)\,dx\\ &= -\csc^{k-2}(x)\cot(x) - (k-2)\int \csc^{k-2}(x)(\csc^2(x)-1)\,dx.\end{aligned}$$

Así que tenemos la siguiente fórmula

$$\begin{aligned}&\int \csc^k(x)dx\\ &\qquad = -\csc^{k-2}(x)\cot(x) - (k-2)\int \csc^k(x)\,dx + (k-2)\int \csc^{k-2}(x)\,dx.\end{aligned}$$

Agrupando adecuadamente concluimos que

$$(k-1)\int \csc^k(x)dx = -\csc^{k-2}(x)\cot(x) + (k-2)\int \csc^{k-2}(x)\,dx,$$

lo cual es equivalente a la fórmula recursiva

$$\int \csc^k(x)dx = -\frac{1}{k-1}\csc^{k-2}(x)\cot(x) + \left(\frac{k-2}{k-1}\right)\int \csc^{k-2}(x)\,dx.$$

Por ejemplo,

$$\begin{aligned}\int \csc^3(x)dx &= -\frac{1}{2}\csc(x)\cot(x) + \frac{1}{2}\int \csc(x)\,dx\\ &= -\frac{1}{2}\csc(x)\cot(x) - \frac{1}{2}\ln\left(\cot(x)+\csc(x)\right) + C.\end{aligned}$$

Ejemplo 1.26. Calcular la integral $\int \csc(x)\cot^2(x)dx$.

Solución.

$$\int \csc(x)\cot^2(x)dx = \int \csc(x)(\csc^2(x)-1)dx = \int (\csc^3(x)-\csc(x))dx.$$

Utilizando la fórmula anterior concluimos que

$$\begin{aligned}\int \csc^3(x)dx &= -\frac{1}{2}\csc(x)\cot(x) - \frac{1}{2}\ln\left(\cot(x)+\csc(x)\right) + C\\ \int \csc(x)dx &= -\ln\left(\cot(x)+\csc(x)\right) + C.\end{aligned}$$

Por lo tanto concluimos que

$$\int \csc(x)\cot^2(x)dx = -\frac{1}{2}\csc(x)\cot(x) + \frac{1}{2}\ln\left(\cot(x)+\csc(x)\right) + C.$$

Ejercicios

1. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^4(r)\,dr.$
2. $\displaystyle\int \cot(4t)\,dt.$
3. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2(u)\cos^2(u)\,du.$
4. $\displaystyle\int \csc(2t)\,dt.$
5. $\displaystyle\int \cot^3(y)\,dy.$
6. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^3(x)\cos^3(x)\,dx.$
7. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^{3/2}(t)\cos^3(t)\,dt.$
8. $\displaystyle\int \cos^6(4\theta)\,d\theta.$
9. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^3(3w)\cos^4(3w)\,dw.$
10. $\displaystyle\int \tan^3(t)\,dt.$
11. $\displaystyle\int \tan(\theta)\sec^4(\theta)\,d\theta.$
12. $\displaystyle\int \cot^3(t)\csc^2(t)\,dt.$
13. $\displaystyle\int \tan^4(t)\,dt.$
14. $\displaystyle\int \tan^2(2t)\sec^4(2t)\,dt.$
15. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2(3\alpha)\cos^2(3\alpha)\,d\alpha.$
16. $\displaystyle\int \cot^n(t)\,dt.$
17. $\displaystyle\int \operatorname{sen}(2t)\operatorname{sen}(4t)\,dt.$
18. $\displaystyle\int \cot^3(y)\csc^{3/2}(y)\,dy.$
19. $\displaystyle\int \tan^2\left(\frac{t}{2}\right)\,dt.$
20. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}(z)}{\cos^3(z)}\,dz.$
21. $\displaystyle\int \frac{\sec^4(t)}{\tan^2(t)}\,dt.$
22. $\displaystyle\int \frac{\cot^3(t)}{\csc^2(t)}\,dt.$
23. $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^4(2s)}\,ds.$
24. $\displaystyle\int \frac{\cot(v)+\csc(v)}{\operatorname{sen}(v)}\,dv.$

1.2.4. Fracciones parciales. En esta sección estamos interesados en el cálculo de antiderivadas o integrales indefinidas de la forma:

$$\int R(x)\,dx,$$

donde R es una función **racional**. Es decir, $R(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$, donde $p(x)$ y $q(x)$ son polinomios con coeficientes reales. Note que siempre podemos suponer que las funciones polinómicas p y q no tienen factores comunes, o equivalentemente no tienen raíces (ceros) comunes. En caso contrario, dichos factores se pueden cancelar.

Definición 1.27 (**Fracción propia**). Diremos que una función racional $R(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ es una **fracción propia**, cuando el grado del polinomio p es estrictamente menor que el grado del polinomio q.

Ejemplos 1.28. Considere las siguientes funciones racionales

$$R_1(x) = \frac{5x^4 - 2x^2 + 3x - 1}{(x^2+2)(x-3)} \qquad \text{y} \qquad R_2(x) = \frac{3x^2+3x-1}{(x^2+2)(x-3)}.$$

En este caso, R_1 no es una fracción propia mientras que R_2 sí lo es.

En general, dada una función racional R que no sea una fracción propia podemos utilizar el **algoritmo de la división** para descomponer R como la suma de un polinomio y una fracción propia. En efecto, si $R(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$, existen polinomios $c(x)$ (cociente) y $r(x)$ (residuo) tales

$$p(x) = c(x)q(x) + r(x) \quad \Leftrightarrow \quad R(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = c(x) + \frac{r(x)}{q(x)},$$

con $\dfrac{r(x)}{q(x)}$ siendo una fracción propia (grado de r menor estrictamente que el grado de q).

Ejemplos 1.29. Se puede verificar utilizando el algoritmo de la división que

$$\frac{2x^4 - x^2 + 3x - 1}{x^2 + 2x - 1} = 2x^2 - 4x + 9 + \frac{-19x + 8}{x^2 + 2x - 1}.$$

Observación 1.30. A continuación vamos a exhibir algunos ejemplos en los que se muestra como la fracción propia $R(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ se puede descomponer como una suma de fracciones propias asociadas con la factorización del denominador q, lo que permite calcular la integral indefinida $\int R(x)\, dx$.

1.- $\dfrac{p(x)}{q(x)} = \dfrac{x+1}{(x-1)(x-2)} = \dfrac{-2}{x-1} + \dfrac{3}{x-2}.$

Notemos que el polinomio del denominador $q(x) = (x-1)(x-2)$ tiene dos raíces reales $x_1 = 1$ (de orden 1) asociada con el factor $q_1(x) = x - 1$ y $x_2 = 2$ (orden 1) asociada con el factor $q_1(x) = x - 2$.

Lo que se aprecia es que la función racional $R(x) = \dfrac{x+1}{(x-1)(x-2)}$ tiene asociado con el factor $q_1(x) = x - 1$ (o con la raíz $x_1 = 1$) un sumando (fracción propia)

$$\frac{-2}{x-1},$$

y asociado con el factor $q_2(x) = x - 2$ (o con la raíz $x_2 = 2$), tiene un sumando (fracción propia)

$$\frac{3}{x-2}.$$

Este tipo de descomposiciones se pueden utilizar para el cálculo de la integral indefinida $\int R(x)\, dx$. En este caso,

$$\begin{aligned}\int \frac{x+1}{(x-1)(x-2)}\, dx &= \int \left(\frac{-2}{x-1} + \frac{3}{x-2} \right) dx \\ &= -2\ln|x-1| + 3\ln|x-2| + C.\end{aligned}$$

2.- $\dfrac{p(x)}{q(x)} = \dfrac{x+18}{(x-2)^2(x+2)} = \dfrac{-1}{x-2} + \dfrac{5}{(x-2)^2} + \dfrac{1}{x+2}.$

Notemos que el polinomio del denominador $q(x) = (x-2)^2(x+2)$ tiene dos raíces reales $x_1 = 2$ (orden 2) asociada con el factor $q_1(x) = x-2$ y $x_2 = -2$ (orden 1) asociada con el factor $q_1(x) = x+2$. Lo que se aprecia es que asociada con la raíz $x_1 = 2$ aparece la suma de dos fracciones propias

$$\underbrace{\frac{-1}{x-2} + \frac{5}{(x-2)^2}}_{\text{sumandos asocidado con } (x-2)}.$$

En el caso de la raíz $x_2 = -2$ aparece una fracción propia:

$$\underbrace{\frac{1}{x+2}}_{\text{sumando asocidado con } (x+2)}.$$

Utilizando esta descomposición podemos calcular la integral indefinida $\displaystyle\int R(x)\,dx$. En este caso,

$$\begin{aligned}\int \frac{x+18}{(x-2)^2(x+2)}\,dx &= \int \left(\frac{-1}{x-2} + \frac{5}{(x-2)^2} + \frac{1}{x+2}\right) dx \\ &= -\ln|x-2| - \frac{5}{x-2} + \ln|x+2| + C.\end{aligned}$$

3.- $\dfrac{p(x)}{q(x)} = \dfrac{-x+3}{(x^2+1)(x-1)} = \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{x+2}{x^2+1}.$

Observemos que el denominador $q(x) = (x^2+1)(x-1)$ tiene una raíz compleja ($x_1 = i$) de orden 1 asociada con el factor $q_1(x) = x^2+1$ y una raíz real $x_2 = 1$ (orden 1) asociada con el factor $q_2(x) = x-1$. Como en el caso anterior, se tiene que asociada con la raíz $x_1 = i$ aparece la fracción propia $-\dfrac{x+2}{x^2+1}$, y con la raíz $x_1 = 1$ aparece la fracción propia $\dfrac{1}{x-1}$. En particular,

$$\begin{aligned}\int \frac{-x+3}{(x^2+1)(x-1)}\,dx &= \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{x+2}{x^2+1}\right) dx \\ &= \ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x^2+1| - 2\arctan x + C.\end{aligned}$$

Las descomposiciones exhibidas en la observación anterior están basadas en un resultado muy importante conocido como el **Teorema Fundamental del Álgebra**, el cual garantiza que todo polinomio q con coeficientes reales se puede descomponer como un producto de factores lineales de la forma $ax+b$ (que se pueden repetir) y de la forma $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ (que se pueden repetir), para los cuales el discriminante $\beta^2 - 4\alpha\gamma < 0$. Los polinomios $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ con discriminante $\beta^2 - 4\alpha\gamma < 0$ se denominan factores **cuadráticos irreducibles** sobre los números reales $\mathbb{R}$ en el sentido en que sus raíces son necesariamente **números complejos**.

Notemos que el polinomio cuadrático con coeficientes $q_0(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ es irreducible sobre los números reales $\mathbb{R}$ si y sólo si no tiene raíces reales, dado que $\beta^2 - 4\alpha\gamma < 0$. Por ejemplo, los siguientes polinomios cuadráticos son irreducibles sobre los números reales:

1.- $q_1(x) = x^2 + 4$, pues $\beta^2 - 4\alpha\gamma = 0^2 - 4(1)(4) = -16 < 0$.

2.- $q_2(x) = 2x^2 + 3x + 5$, pues $\beta^2 - 4\alpha\gamma = 3^2 - 4(2)(5) = -31 < 0$.

3.- $q_1(x) = 3x^2 - 2x + 1$, pues $\beta^2 - 4\alpha\gamma = 2^2 - 4(3)(1) = -8 < 0$.

Teorema 1.31 (**Teorema Fundamental del Álgebra**). *Todo polinomio $q(x)$ de grado $n \in \mathbb{N}$ con coeficientes reales se puede descomponer como un producto de polinomios de la forma $ax + b$, asociados con las raíces reales de $q(x)$ y polinomios cuadráticos irreducibles de la forma $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ asociados con las raíces complejas de polinomio $q(x)$. Más concretamente,*

$$
\begin{aligned}
q(x) = (a_1 x + b_1)^{n_1}(a_2 x + b_2)^{n_2} \cdots (a_l x + b_l)^{n_l} \times \\
\times (\alpha x^2 + \beta_1 x + \gamma_1)^{m_1}(\alpha_2 x^2 + \beta_2 x + \gamma_2)^{m_2} \cdots (\alpha_j x^2 + \beta_j x + \gamma_j)^{m_j},
\end{aligned}
$$

donde n_r $(1 \leq r \leq l)$ es la multiplicidad de la raíz real del factor $(a_r x_r + b_r)$ y m_s $(1 \leq s \leq j)$ es la multiplicidad de la raíz compleja del factor irreducible $(\alpha_s x^2 + \beta_s x + \gamma_s)$. Además,

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_l + 2m_1 + 2m_2 + \cdots + 2m_j = n.$$

Descomposición en fracciones parciales. Utilizando este resultado se puede mostrar en cursos avanzados para estudiantes de matemáticas que toda función racional $R(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ se puede descomponer en una suma de fracciones propias, conocida como **descomposición en fracciones parciales**, asociadas con cada raíz real o compleja del polinomio q. Más exactamente, si $R(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ es una función racional propia tal que p y q no tienen factores comúnes, y si q se descompone como

$$q(x) = (a_1x + b_1)^{n_1}(a_2x + b_2)^{n_2} \cdots (a_lx + b_l)^{n_l} \times$$
$$\times\, (\alpha x^2 + \beta_1 x + \gamma_1)^{m_1}(\alpha_2 x^2 + \beta_2 x + \gamma_2)^{m_2} \cdots (\alpha_j x^2 + \beta_j x + \gamma_j)^{m_j},$$

entonces dependiendo de los factores tenemos las siguiente descomposición:

a) Por cada factor de la forma $(ax + b)^n$ en la descomposición de q, $R(x)$ tiene una suma de fracciones propias, denominadas **fracciones parciales**, de la forma:

$$\frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \frac{A_3}{(ax+b)^3} + \cdots + \frac{A_n}{(ax+b)^n}.$$

b) Por cada factor cuadrático irreducible de la forma $(\alpha x^2 + \beta x + \gamma)^m$ en la descomposición de q, $R(x)$ tiene una suma de fracciones propias, denominadas **fracciones parciales**, de la forma:

$$\frac{A_1x + B_1}{\alpha x^2 + \beta x + \gamma} + \frac{A_2x + B_2}{(\alpha x^2 + \beta x + \gamma)^2} + \frac{A_3x + B_3}{(\alpha x^2 + \beta x + \gamma)^3} + \cdots + \frac{A_mx + B_m}{(\alpha x^2 + \beta x + \gamma)^m}.$$

EJEMPLO 1.32. Calcule la integral indefinida dada utilizando la descomposición de la función racional dada en fracciones parciales.

1.- $\quad I = \displaystyle\int \frac{8x-1}{(2x-3)(3x+1)}\,dx.$

En este caso el denominador es $q(x) = (2x-3)(3x+1)$. Por lo tanto, q tiene las siguientes raíces $x_1 = \frac{3}{2}$ de multiplicidad 1 y $x_2 = -\frac{1}{3}$ de multiplicidad 1. De acuerdo con la descomposición en fracciones parciales, la función racional se puede escribir como:

$$\frac{8x-1}{(2x-3)(3x+1)} = \frac{a_1}{2x-3} + \frac{a_2}{3x+1} = \frac{a_1(3x+1) + a_2(2x-3)}{(2x-3)(3x+1)}.$$

Igualando los numeradores se concluye que para todo x,

$$a_1(3x+1) + a_2(2x-3) = 8x - 1.$$

Para determinar a_1, a_2, a_3 basta con dar dos valores a la variable x. Los valores más simples son las raíces de q. Es decir, $x = \frac{3}{2}$, $x = -\frac{1}{3}$.

$$x = \frac{3}{2} \Rightarrow a_1\left(3\left(\frac{3}{2}\right) + 1\right) = 8\left(\frac{3}{2}\right) - 1 = 11 \Leftrightarrow \left(\frac{11}{2}\right)a_1 = 11 \Leftrightarrow a_1 = 2.$$
$$x = -\frac{1}{3} \Rightarrow a_2\left(2\left(-\frac{1}{3}\right) - 3\right) = 8\left(-\frac{1}{3}\right) - 1 \Leftrightarrow \left(\frac{11}{3}\right)a_2 = \frac{11}{3} \Leftrightarrow a_2 = 1.$$

Entonces la función racional tiene la forma

$$\frac{8x-1}{(2x-3)(3x+1)} = \frac{2}{2x-3} + \frac{1}{3x+1}.$$

Así que la integral se calcula fácilmente,

$$\begin{aligned}\int \frac{8x-1}{(2x-3)(3x+1)}\,dx &= \int \left(\frac{2}{2x-3} + \frac{1}{3x+1}\right)dx \\ &= \ln|2x-1| + \frac{1}{3}\ln|3x+2| + C.\end{aligned}$$

2.- $\quad I = \displaystyle\int \frac{11x-9}{(2x-1)^2(3x+2)}\,dx.$

En este caso el denominador es $q(x) = (2x-1)^2(3x+2)$. Por lo tanto, q tiene las siguientes raíces $x_1 = \frac{1}{2}$ de multiplicidad 2 y $x_2 = -\frac{2}{3}$ de multiplicidad 1. De acuerdo con la descomposición en fracciones parciales, la función racional se puede escribir como:

$$\begin{aligned}\frac{11x-9}{(2x-1)^2(3x+2)} &= \frac{a_1}{2x-1} + \frac{a_2}{(2x-1)^2} + \frac{a_3}{3x+2} \\ &= \frac{a_1(2x-1)(3x+2) + a_2(3x+2) + a_3(2x-1)^2}{(2x-1)^2(3x+2)}.\end{aligned}$$

Igualando los numeradores se concluye que para todo x,

$$a_1(2x-1)(3x+2) + a_2(3x+2) + a_3(2x-1)^2 = 11x-9.$$

Para determinar a_1, a_2, a_3 basta con dar tres valores a la variable x. Los valores más simples son las raíces de q. Es decir, $x = \frac{1}{2}$, $x = -\frac{2}{3}$ y otro valor arbitrario, por ejemplo $x = 0$.

$$\begin{aligned}x = \frac{1}{2} \quad &\Rightarrow \quad a_2\left(\frac{3}{2}+2\right) = \frac{11}{2} - 9 = -\frac{7}{2} \quad \Leftrightarrow \quad a_2 = -1. \\ x = -\frac{2}{3} \quad &\Rightarrow \quad a_3\left(-\frac{4}{3}-1\right) = -\frac{22}{3} - 9 = -\frac{49}{3} \quad \Leftrightarrow \quad a_3 = -3. \\ x = 0 \quad &\Rightarrow \quad -2a_1 + 2a_2 + a_3 = -9 \quad \Leftrightarrow \quad a_1 = \frac{9+2a_2+a_3}{2}.\end{aligned}$$

Dado que $a_3 = -3$, concluimos que $a_1 = \frac{9+2a_2+a_3}{2} = \frac{9+2(-1)+(-3)}{2} = 2$. Entonces la función racional tiene la forma

$$\frac{11x-9}{(2x-1)^2(3x+2)} = \frac{2}{2x-1} - \frac{1}{(2x-1)^2} - \frac{3}{3x+2}.$$

Así que la integral se calcula fácilmente,

$$\int \frac{11x-9}{(2x-1)^2(3x+2)}\,dx = \int \left(\frac{2}{2x-1} - \frac{1}{(2x-1)^2} - \frac{3}{3x+2} \right) dx$$
$$= \ln|2x-1| + \frac{1}{2(2x-1)} - \ln|3x+2| + C.$$

3.- $\quad I = \displaystyle\int \frac{4x+7}{(2x+1)^2(x^2+2x+2)}\,dx.$

Sea $q(x) = (2x+1)^2(x^2+2x+2)$. La primera observación es que q tiene dos factores $q_1(x) = 2x+1$ con una raíz real ($x_1 = -\frac{1}{2}$) de multiplicidad 2, y $q_2(x) = x^2+2x+2$ es un factor irreducible (pues el discriminante $\beta^2 - 4\alpha\gamma = (2)^2 - 4(1)(2) = -4 < 0$). Entonces de la descomposición en fracciones parciales,

$$\frac{4x+7}{(2x+1)^2(x^2+2x+2)} = \frac{a}{2x+1} + \frac{b}{(2x+1)^2} + \frac{cx+d}{x^2+2x+2}.$$

Colocando denominador común, obtenemos que

$$\frac{4x+7}{(2x+1)^2(x^2+2x+2)}$$
$$= \frac{a(2x+1)(x^2+2x+2) + b(x^2+2x+2) + (cx+d)(2x+1)^2}{(2x+1)^2(x^2+2x+2)}.$$

Por lo tanto, para cada x,

$$a(2x+1)(x^2+2x+2) + b(x^2+2x+2) + (cx+d)(2x+1)^2 = 4x+7.$$

Para determinar las cuatro constantes a, b, c, d basta con dar cuatro valores arbitrarios a la variable x. Los valores más simples están asociados con las raíces de los factores q_1 y q_2. Además de las raíces reales, cuando las raíces son complejas se pueden tomar valores de x sencillos de evaluar como $0, 1, -1, \cdots$.

$$x = -\frac{1}{2} \;\Rightarrow\; b\left(\frac{5}{4}\right) = -2+7 \;\Leftrightarrow\; b = 4.$$
$$x = 0 \;\Rightarrow\; 2a + 2b + d = 7 \;\Leftrightarrow\; 2a + d = -1.$$
$$x = 1 \;\Rightarrow\; 3{,}5a + 20 + 9(c+d) = 11 \quad\Leftrightarrow\quad 15a + 9c + 9d = -9.$$
$$x = -1 \;\Rightarrow\; -a + 4 + d - c = 3 \quad\Leftrightarrow\quad -a - c + d = -1.$$

Resolviendo este sistema se puede ver que $a = 0$, $c = 0$ y $d = -1$. Es decir,

$$\frac{4x+7}{(2x+1)^2(x^2+2x+2)} = \frac{4}{(2x+1)^2} - \frac{1}{x^2+2x+2}.$$

En consecuencia, completando cuadrados en la expresión cuadrática x^2+2x+2, encontramos que $x^2+2x+2 = (x+1)^2+1$. Así

$$\begin{aligned}\int \frac{4x+7}{(2x+1)^2(x^2+2x+2)}\,dx &= \int \left(\frac{4}{(2x+1)^2} - \frac{1}{x^2+2x+2}\right) dx\\ &= \int \left(\frac{4}{(2x+1)^2} - \frac{1}{(x+1)^2+1}\right) dx\\ &= -\frac{2}{2x+1} - \arctan(x+1) + C.\end{aligned}$$

4.- $\quad I = \displaystyle\int \frac{t^4+2t^3+t^2-t}{(t+1)(t^2+t+1)^2}\,dt.$

Sea $q(t) = (t+1)(t^2+t+1)^2$. Notemos que el factor $q_1(t) = t+1$ tiene a $t_1 = -1$ como raíz real de multiplicidad uno y el factor $q_2(t) = t^2+t+1$ es irreducible en $\mathbb{R}$, (pues el discriminante $B^2 - 4AC = (1)^2 - 4(1)(1) = -2 < 0$). Del teorema de descomposición en fracciones parciales tenemos que

$$\frac{t^4+2t^3+t^2-t}{(t+1)(t^2+t+1)^2} = \frac{a}{t+1} + \frac{bt+c}{t^2+t+1} + \frac{dt+e}{(t^2+t+1)^2}.$$

Colocando denominador común encontramos que

$$\frac{t^4+2t^3+t^2-t}{(t+1)(t^2+t+1)^2} = \frac{a(t^2+t+1)^2 + (bt+c)(t+1)(t^2+t+1) + (dt+e)(t+1)}{(t+1)(t^2+t+1)^2}.$$

En consecuencia, para cada t tenemos que

$$t^4+2t^3+t^2-t = a(t^2+t+1)^2 + (bt+c)(t+1)(t^2+t+1) + (dt+e)(t+1).$$

Como hemos visto en los casos anteriores necesitamos dar cinco valores a la variable t para escoger las constantes a, b, c, d y e. En este caso vamos a tomar $t=-1$, $t=0$, $t=1$ y $t=i$.

$$\begin{aligned}
t=-1 \quad &\Rightarrow \quad a=1\\
t=0 \quad &\Rightarrow \quad 1+c+e=0 \quad \Leftrightarrow \quad c+e=-1.\\
t=1 \quad &\Rightarrow \quad 9+6(b+c)+2(d+e)=3 \quad \Leftrightarrow \quad 6b+6c+2d+2e=-6.\\
t=i \quad &\Rightarrow \quad -1+(c+bi)(i+1)i=(e+di)(1+i)=-3i \Leftrightarrow\\
&\quad -1-(c+b)+(c-b)i+(e-d)+(e+d)i=-3i \Leftrightarrow\\
&\quad -b-c-d+e=1 \ \wedge \ -b+c+d+e=-3.
\end{aligned}$$

Resolviendo el sistema obtenido vía método de eliminación concluimos que $a=1$, $b=c=0$, $d=-2$ y $e=-1$. Así que

$$\frac{t^4+2t^3+t^2-t}{(t+1)(t^2+t+1)^2} = \frac{1}{t+1} - \frac{2t+1}{(t^2+t+1)^2}.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}\int \frac{t^4+2t^3+t^2-t}{(t+1)(t^2+t+1)^2}\,dt &= \int \left(\frac{1}{t+1} - \frac{2t+1}{(t^2+t+1)^2}\right)dt \\ &= \ln|t+1| + \frac{1}{t^2+t+1} + C.\end{aligned}$$

5.- $\quad I = \displaystyle\int \frac{z^4+3z^2-2z+2}{(z^2+1)^2(z-1)^2}\,dz.$

Sea $q(z) = (z^2+1)^2(z-1)^2$. La primera observación es que el factor $q_1(z) = (z-1)^2$ tiene a $z = 1$ como raíz real de multiplicidad dos y el factor $q_2(z) = (z^2+1)^2$ tiene raíces complejas. Del teorema de descomposición en fracciones parciales sabemos que

$$\frac{z^4+3z^2-2z+2}{(z^2+1)^2(z-1)^2} = \frac{a}{z-1} + \frac{b}{(z-1)^2} + \frac{cz+d}{z^2+1} + \frac{ez+f}{(z^2+1)^2}.$$

Colocando denominador común, encontramos que

$$\begin{aligned}&\frac{z^4+3z^2-2z+2}{(z^2+1)^2(z-1)^2} \\ &= \frac{a(z-1)(z^2+1)^2+b(z^2+1)^2+(cz+d)(z-1)^2(z^2+1)+(ez+f)(z-1)^2}{(z-1)^2(z^2+1)^2}.\end{aligned}$$

Tomando los valores $z = 1$, $z = 0$, $z = -1$, $z = 2$ y $z = i$, concluimos que $b = 1$, $f = 1$, $a = c = d = e = 0$. Por lo tanto,

$$\frac{z^4+3z^2-2z+2}{(z^2+1)^2(z-1)^2} = \frac{1}{(z-1)^2} + \frac{1}{(z^2+1)^2}.$$

En particular,

$$\int \frac{z^4+3z^2-2z+2}{(z^2+1)^2(z-1)^2}\,dz = \int \left(\frac{1}{(z-1)^2} + \frac{1}{(z^2+1)^2}\right)dz = \frac{-1}{z-1} + \int \frac{1}{(z^2+1)^2}\,dz.$$

La integral $\;I_1 = \displaystyle\int \frac{1}{(z^2+1)^2}\,dz\;$ requiere efectuar una sustitución trigonométrica. Este tipo de integrales serán consideradas en la siguientes sección.

Ejercicios

I.- Evalúe las siguientes integrales utilizando fracciones parciales.

1. $\displaystyle\int \frac{y^3}{2y-1}\,dy.$
2. $\displaystyle\int \frac{y}{y^2+4y}\,dy.$
3. $\displaystyle\int \frac{y^3}{y^2+y-6}\,dy.$
4. $\displaystyle\int \frac{z+1}{z^3-z^2}\,dz.$
5. $\displaystyle\int \frac{y^3-1}{y^2+1}\,dy.$
6. $\displaystyle\int \frac{1}{(y^2+1)(y^2+4)}\,dy.$

7. $\displaystyle\int \frac{y^4}{y^2-4}\,dy.$ 8. $\displaystyle\int \frac{y^4}{y^2+4y+4}\,dy.$ 9. $\displaystyle\int \frac{1}{(y+1)(y^2+1)}\,dy.$

10. $\displaystyle\int \frac{z^2+z}{z^3-z^2-2z}\,dz.$ 11. $\displaystyle\int \frac{2z^2+3}{z^4-2z^2+1}\,dz.$ 12. $\displaystyle\int \frac{z^2+z}{(z^2-4)(z+4)}\,dz.$

13. $\displaystyle\int \frac{4z^4+z+1}{z^5+z^4}\,dz.$ 14. $\displaystyle\int \frac{z^2+2}{(z^2+1)^2}\,dz.$ 15. $\displaystyle\int \frac{6z^3-18z}{(z^2-1)(z^2-4)}\,dz.$

16. $\displaystyle\int \frac{z^2}{z^4-1}\,dz.$ 17. $\displaystyle\int \frac{x^3-x+3}{x^2+x-2}\,dx.$ 18. $\displaystyle\int \frac{z^4+4}{(z^2+1)^2(z^2+2)}\,dz.$

19. $\displaystyle\int \frac{x^3}{(x^2-4)^2}\,dx.$ 20. $\displaystyle\int \frac{x+2}{x^2-4x}\,dx.$ 21. $\displaystyle\int \frac{2x-3}{(x-1)^2}\,dx.$

22. $\displaystyle\int \frac{x^4}{(x-1)^3}\,dx.$ 23. $\displaystyle\int \frac{3x}{x^2-6x+9}\,dx.$ 24. $\displaystyle\int \frac{4x^2-1}{2x(x^2+2x+1)}\,dx.$

25. $\displaystyle\int \frac{x}{(6x^4-1}\,dx.$ 26. $\displaystyle\int \frac{x^2-1}{x^3+x}\,dx.$ 27. $\displaystyle\int \frac{6x^2+1}{x^2(x-1)^3}\,dx.$

28. $\displaystyle\int \frac{x^2+x+2}{(x^2+2)^2}\,dx.$ 29. $\displaystyle\int \frac{x^2+5}{x^3+x}\,dx.$ 30. $\displaystyle\int \frac{x^2-4x+7}{x^3-x^2+x+3}\,dx.$

31. $\displaystyle\int \frac{x^2+5}{x^3-x^2+x+3}\,dx.$ 32. $\displaystyle\int \frac{2x^3-4x^2-15x+5}{x^2-2x-8}\,dx.$

II.- En los siguientes problemas haga una sustitución preliminar antes de usar el método de fracciones parciales.

1. $\displaystyle\int \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}^2\theta-\operatorname{sen}\theta-6}\,d\theta.$ 2. $\displaystyle\int \frac{\sec^2 t}{\tan^3 t+\tan^2 t}\,dt.$

1.2.5. Sustituciones trigonométricas. Este método se usa en la solución de integrales en las que aparecen expresiones de la forma

$$\sqrt{a^2+x^2},\quad \sqrt{a^2-x^2},\quad \sqrt{x^2-a^2},\quad a>0.$$

El método que vamos a utilizar consiste en eliminar los radicales mediante la utilización de las identidades trigonométricas

$$1+\tan^2(\alpha)=\sec^2(\alpha),\quad \sec^2(\alpha)-1=\tan^2(\alpha),\quad \operatorname{sen}^2(\alpha)+\cos^2(\alpha)=1.$$

Caso I. Integrales con expresiones de la forma $\sqrt{a^2+x^2}$.

En este caso consideramos la sustitución $x = a\tan\alpha$ con $a > 0$. En este caso tenemos que:

$$\begin{aligned}\sqrt{a^2+x^2} &= \sqrt{a^2+a^2\tan^2(\alpha)}\\ &= \sqrt{a^2(1+\tan^2(\alpha))}\\ &= \sqrt{a^2(\sec^2(\alpha))}\\ &= \left|a\sec(\alpha)\right|.\end{aligned}$$

Notemos que la sustitución $x = a\tan(\alpha)$ es equivalente a que $\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$, con $\frac{-\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Dado que en el intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ la función $\sec\alpha$ es positiva, entonces

$$|a\sec\alpha| = a\sec\alpha.$$

En consecuencia concluimos que $\sqrt{a^2+x^2} = a\sec(\alpha)$.

Ejemplo 1.33. Calcular la integral $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{4+x^2}}dx$.

Solución. Vamos a utilizar la sustitución. En este caso $a = 2$. Por tanto, si hacemos la sustitución $x = 2\tan\alpha$, tendremos que $dx = 2\sec^2(\alpha)d\alpha$. Así que,

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{\sqrt{4+x^2}}dx &= \int \frac{4\tan^2(\alpha)}{\sqrt{4(1+\tan^2(\alpha))}}2\sec^2(\alpha)d\alpha\\ &= \int \frac{4\tan^2(\alpha)2\sec^2(\alpha)}{\sqrt{4\sec^2(\alpha)}}d\alpha\\ &= 4\int \frac{\tan^2(\alpha)\sec^2(\alpha)}{\sec\alpha}d\alpha\\ &= 4\int \tan^2(\alpha)\sec(\alpha)d\alpha\\ &= 4\int (\sec^2(\alpha)-1)\sec(\alpha)d\alpha\\ &= 4\int (\sec^3(\alpha)-\sec(\alpha))d\alpha.\end{aligned}$$

Pero recordemos que

$$\begin{aligned}\int \sec(\alpha)dx &= \ln\left(\tan(\alpha)+\sec(\alpha)\right)+C\\ \int \sec^3(\alpha)dx &= \frac{1}{2}\sec(\alpha)\tan(\alpha)+\frac{1}{2}\ln\left(\tan(\alpha)+\sec(\alpha)\right)+C.\end{aligned}$$

Entonces, directamente obtenemos que

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{\sqrt{4+x^2}}dx &= 4\int (\sec^3(\alpha) - \sec(\alpha))d\alpha \\ &= 4\Big(\frac{1}{2}\sec(\alpha)\tan(\alpha) + \frac{1}{2}\ln(\tan(\alpha)+\sec(\alpha)) - \ln(\tan(\alpha)+\sec(\alpha))\Big) \\ &= 2\sec(\alpha)\tan(\alpha) - 2\ln(\tan(\alpha)+\sec(\alpha)) + C.\end{aligned}$$

Finalmente, debemos volver a las variables originales. Es decir, expresar α en términos de la variable original x. Para ello, recordemos que si $x = 2\tan\alpha$, entonces $\tan(\alpha) = \dfrac{x}{2}$. Utilizando un triángulo rectángulo podemos expresar las funciones trigonométricas en términos de x. Más concretamente, dado que

$$\tan(\alpha) = \frac{x}{2} = \frac{\text{cateto opuesto } (CO)}{\text{cateto adyacente } (CA)}.$$

Consideremos el triángulo en la figura y denotemos el ángulo α entre la base y la hipotenusa. Por lo tanto, la base es el cateto adyacente y tiene longitud $CA = 2$. Por lo tanto, el cateto opuesto tiene longitud $CO = x$. De modo que la hipotenusa es (ver gráfica)

$$H = \sqrt{2^2 + x^2} = \sqrt{4+x^2}.$$

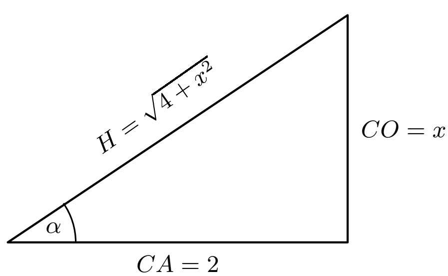


Figura 1.2.1: Expresión $H = \sqrt{4+x^2}$.

Observemos que

$$\sec(\alpha) = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{H}{CA} = \frac{\sqrt{x^2+4}}{2}, \quad \tan(\alpha) = \frac{x}{2}.$$

En consecuencia concluimos que

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{4+x^2}}dx = \frac{x\sqrt{x^2+4}}{2} - 2\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+4}+x}{2}\right| + C.$$

Caso II. Integrales con expresiones de la forma $\sqrt{a^2 - x^2}$.

En este caso se hace la sustitución $x = a\,\mathrm{sen}\,\alpha$. Por lo tanto, de esta forma se tendrá que

$$\begin{aligned}\sqrt{a^2 - x^2} &= \sqrt{a^2 - a^2\,\mathrm{sen}^2(\alpha)}\\ &= \sqrt{a^2(1 - \mathrm{sen}^2(\alpha))}\\ &= \sqrt{a^2(\cos^2(\alpha))}\\ &= |a\cos(\alpha)|.\end{aligned}$$

La sustitución $x = a\,\mathrm{sen}(\alpha)$ es equivalente a que $\alpha = \mathrm{sen}^{-1}(\frac{x}{a})$, con $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$, por esta razón $|a\cos\alpha| = a\cos(\alpha)$, ya que en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ la función $\cos(\alpha)$ es positiva. En consecuencia

$$\sqrt{a^2 - x^2} = a\cos(\alpha).$$

Ejemplo 1.34. Calcular la integral $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{1 - x^2}}dx$.

En este caso $a = 1$, por tanto, si se hace la sustitución $x = \mathrm{sen}(\alpha)$, se tendrá que $dx = \cos(\alpha)d\alpha$. Reemplazando encontramos que,

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3}{\sqrt{1 - x^2}}dx &= \int \frac{\mathrm{sen}^3(\alpha)}{\sqrt{1 - \mathrm{sen}^2(\alpha)}}\cos(\alpha)d\alpha\\ &= \int \frac{\mathrm{sen}^3(\alpha)}{\sqrt{\cos^2\alpha}}\cos(\alpha)d\alpha\\ &= \int \mathrm{sen}^3(\alpha)d\alpha\\ &= \int \mathrm{sen}\,\alpha\,\mathrm{sen}^2(\alpha)d\alpha\\ &= \int \mathrm{sen}\,\alpha(1 - \cos^2(\alpha))d\alpha.\end{aligned}$$

Esta integral se puede resolver por sustitución de la función trigonométrica cos. Es decir, hagamos, $u = \cos\alpha$, por lo tanto tenemos que $du = -\,\mathrm{sen}(\alpha)d\alpha$ y la integral se convierte en

$$\begin{aligned}\int \mathrm{sen}(\alpha)(1 - \cos^2(\alpha))d\alpha = -\int (1 - u^2)du &= \frac{u^3}{3} - u + C\\ &= \frac{1}{3}\cos^3\alpha - \cos\alpha + C.\end{aligned}$$

Tenemos ahora que retornar a la variable original. Es decir, expresar las función trigonométrica $\cos(\alpha)$ en términos de x. Recordemos que

$$\operatorname{sen}(\alpha) = \frac{x}{1} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{CO}{H}.$$

Consideremos el triángulo en la figura y denotemos el ángulo α entre la base y la hipotenusa. Por lo tanto, la base es el cateto adyacente. Por lo tanto el cateto opuesto tiene longitud $CO = x$ y la hipotenusa tiene longitud $H = 1$. De modo que el cateto adyacente es (ver gráfica)

$$CA = \sqrt{1^2 - x^2} = \sqrt{1 - x^2}.$$

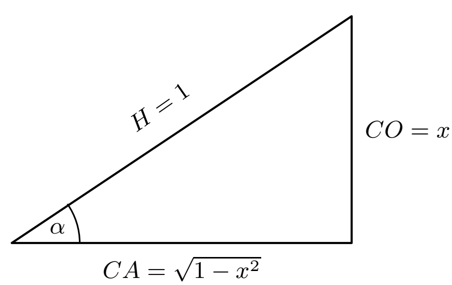


Figura 1.2.2: Expresión $CA = \sqrt{1 - x^2}$.

De otro lado, tenemos que

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{CA}{H} = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{1}, \quad \operatorname{sen}(\alpha) = \frac{x}{1} = x.$$

En consecuencia,

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1 - x^2}} dx = \frac{1}{3}(1 - x^2)^{\frac{2}{3}} - (1 - x^2)^{\frac{1}{2}} + C.$$

Caso III. Integrales con expresiones de la forma $\sqrt{x^2 - a^2}$.

En este caso se hace la sustitución $x = a\sec\alpha$, de esta forma se tendrá que

$$\begin{aligned}
\sqrt{x^2 - a^2} &= \sqrt{a^2\sec^2\alpha - a^2} \\
&= \sqrt{a^2(\sec^2\alpha - 1)} \\
&= \sqrt{a^2(\tan^2\alpha)} \\
&= |a\tan\alpha|\,.
\end{aligned}$$

La sustitución $x = a\sec(\alpha)$ es equivalente a

$$\alpha = \sec^{-1}\left(\frac{x}{a}\right), \quad 0 \leq \alpha < \pi \quad \text{y} \quad |x| \geq a;$$

por esta razón

$$|a\tan(\alpha)| = \pm a\tan(\alpha),$$

ya que en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ la función $\tan\alpha$ es positiva y en el intervalo $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ es negativa.

La pregunta ahora es que signo tomar cuando se hace la sustitución $x = a\sec\alpha$. Note que $|x| > a$ si y sólo si $x \in (-\infty, -a)\bigcup(a, \infty)$. Si $x \in (-\infty, -a)$, es decir si $x < -a$, entonces el cociente $\frac{x}{a}$ es negativo. En consecuencia, $\sec(\alpha)$ es también negativa, y en consecuencia α estará en el intervalo $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$. En este intervalo $\tan(\alpha)$ es resulta ser negativa y tomaremos el signo menos.

Si $x \in (a, \infty)$, es decir si $x > a$, el cociente $\frac{x}{a}$ es positivo, y entonces $\sec(\alpha)$ es positiva y α está en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$. En este caso, $\tan(\alpha)$ es positiva y tomaremos el signo más.

Ejemplos 1.35. 1.- Calcule la integral $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x}dx$, $x \geq 3$.

En este caso consideremos la sustitución $x = 3\sec(\alpha)$. Por lo tanto, tenemos que $dx = 3\sec(\alpha)\tan(\alpha)d\alpha$. Reemplazando encontramos que

$$\begin{aligned}
\sqrt{x^2 - 9} &= \sqrt{9\sec^2(\alpha) - 9} \\
&= \sqrt{9(\sec^2(\alpha) - 1)} \\
&= \sqrt{9(\tan^2(\alpha))} \\
&= 3\tan(\alpha).
\end{aligned}$$

En este caso tomamos el signo positivo pues $x \geq 3$ implica que $\alpha \epsilon \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$. En consecuencia, $\tan(\alpha) > 0$. Entonces tenemos que

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}dx &= \int \frac{\sqrt{9\sec^2(\alpha)-9}}{3\sec(\alpha)} 3\sec(\alpha)\tan(\alpha)d\alpha \\
&= \int \frac{\sqrt{9(\tan^2(\alpha))}}{3\sec(\alpha)} 3\sec(\alpha)\tan(\alpha)d\alpha \\
&= 3\int \tan^2(\alpha)d\alpha \\
&= 3\int (\sec^2(\alpha)-1)d\alpha \\
&= 3\tan(\alpha) - 3\alpha + C.
\end{aligned}$$

Tenemos ahora que retornar a la variable original x. Es decir, expresar la función trigonométrica $\tan(\alpha)$ en términos de x. Recordemos que

$$\sec(\alpha) = \frac{x}{3} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{H}{CA}.$$

Consideremos el triángulo en la figura y denotemos el ángulo α entre la base y la hipotenusa. Por lo tanto, la base es el cateto adyacente. Ahora, el cateto adyacente tiene longitud $CA = 3$ y la hipotenusa tiene longitud $H = x$. De modo que el cateto opuesto es (ver gráfica)

$$CO = \sqrt{x^2 - 3^2} = \sqrt{x^2 - 9}$$

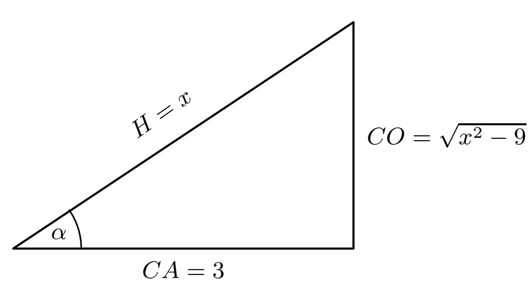


Figura 1.2.3: Expresión $CO = \sqrt{x^2 - 9}$.

Como consecuencia de lo anterior,

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{CO}{CA} = \frac{\sqrt{x^2-9}}{3}, \quad \sec(\alpha) = \frac{x}{3}.$$

Por lo tanto tenemos que,

$$\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}dx = \sqrt{x^2-9} - 3\sec^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) + C.$$

2.- Calcular la integral $\displaystyle\int \frac{\sqrt{4z^2-9}}{z^2}dz$, $z \geq \frac{3}{2}$.

En este caso no tenemos precisamente la expresión $\sqrt{x^2-a^2}$. Pero observemos que

$$\sqrt{4z^2-9} = \sqrt{(2z)^2-9} = \sqrt{x^2-9},$$

donde $x = 2z$. En este caso hacemos la sustitución $2z = x = 3\sec(\alpha)$. Entonces, $2dz = dx = 3\sec(\alpha)\tan(\alpha)d\alpha$. Por lo tanto, sustituyendo

$$z = \frac{3}{2}\sec(\alpha) \quad \text{y} \quad dz = \frac{3}{2}\sec(\alpha)\tan(\alpha)d\alpha,$$

obtenemos que

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{4z^2-9}}{z^2}dz &= \int \frac{\sqrt{(2z)^2-9}}{z^2}dz \\
&= \int \frac{\sqrt{(3\sec\alpha)^2-9}}{(\frac{3}{2}\sec(\alpha))^2}\left(\frac{3}{2}\sec(\alpha)\tan(\alpha)\right)d\alpha \\
&= \frac{2}{3}\int \frac{\sqrt{9\sec^2(\alpha)-9}}{\sec(\alpha)}\tan(\alpha)d\alpha \\
&= 2\int \frac{\sqrt{\sec^2(\alpha)-1}}{\sec(\alpha)}\tan(\alpha)d\alpha \\
&= 2\int \frac{\tan^2(\alpha)}{\sec(\alpha)}d\alpha \\
&= 2\int \frac{\sec^2(\alpha)-1}{\sec(\alpha)}d\alpha \\
&= 2\int \left(\frac{\sec^2(\alpha)}{\sec(\alpha)} - \frac{1}{\sec(\alpha)}\right)d\alpha \\
&= 2\int (\sec(\alpha)-\cos(\alpha))d\alpha \\
&= 2(\ln|\sec(\alpha)+\tan(\alpha)| - \operatorname{sen}(\alpha)) + C.
\end{aligned}$$

Retornemos ahora a la variable original. Es decir, expresar las funciones trigonométricas $\tan(\alpha)$, $\sec(\alpha)$ y $\operatorname{sen}(\alpha)$ en términos de z. Recordemos que

$$z = \frac{3}{2}\sec(\alpha) \quad \Leftrightarrow \quad \sec(\alpha) = \frac{2z}{3} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{H}{CA}.$$

Consideremos el triángulo en la figura y denotemos el ángulo α entre la base y la hipotenusa. Por lo tanto, la base es el cateto adyacente. Ahora, el cateto adyacente tiene longitud $CA = 3$ y la hipotenusa tiene longitud $H = 2z$.

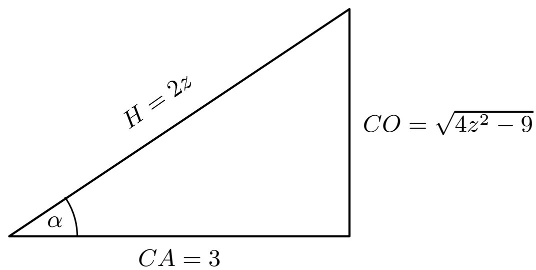


Figura 1.2.4: Expresión $CO = \sqrt{4z^2 - 9}$.

De modo que el cateto opuesto es (ver gráfica)

$$CO = \sqrt{(2z)^2 - 3^2} = \sqrt{4z^2 - 9}.$$

Por lo tanto,

$$\tan(\alpha) = \frac{CO}{CA} = \frac{\sqrt{4z^2 - 9}}{3}, \qquad \sec(\alpha) = \frac{z}{3} \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen}(\alpha) = \frac{CO}{H} = \frac{\sqrt{4z^2 - 9}}{2z}.$$

En consecuencia,

$$\int \frac{\sqrt{4z^2 - 9}}{z^2} dz = 2\left(\ln\left|\frac{2z}{3} + \frac{\sqrt{4z^2 - 9}}{3}\right| - \frac{\sqrt{4z^2 - 9}}{2z}\right) + C.$$

1.2.6. Expresiones cuadráticas generales. Las técnicas de integración utilizadas para integrales indefinidas que contengan expresiones de la forma

$$\sqrt{x^2 + a^2}, \quad \sqrt{x^2 - a^2} \quad \text{o} \quad \sqrt{a^2 - x^2},$$

se pueden extender al caso de expresiones de la forma general

$$\sqrt{\alpha x^2 + \beta x + \gamma}, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}.$$

Esta expresiones, después de completar cuadrados, se pueden reducir mediante un cambio de variable apropiados a expresiones de la forma

$$\sqrt{z^2 + \rho^2}, \quad \sqrt{z^2 - \rho^2} \quad \text{o} \quad \sqrt{\rho^2 - z^2}, \quad \rho > 0.$$

En efecto, vamos a completar cuadrados:

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha\left(x^2 + \frac{\beta}{\alpha} x\right) + \gamma.$$

Recordemos que $(x+r)^2 = x^2 + 2rx + r^2$. Por lo tanto, para completar cuadrados hacemos $2r = \frac{\beta}{\alpha}$ o $r = \frac{\beta}{2\alpha}$. Así que debemos sumar y restar el término $r^2 = \left(\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2$. Es decir,

$$
\begin{aligned}
\alpha x^2 + \beta x + \gamma &= \alpha\left(x^2 + \frac{\beta}{\alpha}x\right) + \gamma \\
&= \alpha\left(x^2 + \frac{\beta}{\alpha}x + \left(\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 - \left(\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2\right) + \gamma \\
&= \alpha\left(x^2 + \frac{\beta}{\alpha}x + \left(\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2\right) + \gamma - \frac{\beta^2}{4\alpha} \\
&= \alpha\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 + \gamma - \frac{\beta^2}{4\alpha} \\
&= \alpha w^2 + \gamma - \frac{\beta^2}{4\alpha}, \qquad\qquad w = x + \frac{\beta}{2\alpha}.
\end{aligned}
$$

Dependiendo de los signos de α y $\gamma - \frac{\beta^2}{4\alpha}$, la última expresión cuadrática toma una de las formas

$$\sqrt{z^2+\rho^2}, \quad \sqrt{z^2-\rho^2} \quad \text{o} \quad \sqrt{\rho^2-z^2}, \quad \rho > 0.$$

Ejemplos 1.36. 1.- Expresar las formas cuadráticas

$$\sqrt{4x^2+8x+10}, \quad \sqrt{2x^2-2x-1} \quad \text{y} \quad \sqrt{-2x^2+6x+2}.$$

en una de las formas

$$\sqrt{z^2+\rho^2}, \quad \sqrt{z^2-\rho^2} \quad \text{o} \quad \sqrt{\rho^2-z^2}, \quad \rho > 0.$$

a) Consideremos la expresión $\sqrt{4x^2+8x+10}$. En este caso, completando cuadrados,

$$
\begin{aligned}
4x^2 + 8x + 10 &= 4(x^2+2x) + 10 = 4(x^2+2x+1-1) + 10 \\
&= 4(x^2+2x+1) + 10 - 4 = 4(x+1)^2 + 6.
\end{aligned}
$$

Así que, si hacemos $z^2 = 4(x+1)^2$ y $\rho^2 = 6$ encontramos que $z = 2(x+1)$ y que $\rho = \sqrt{6}$, y por lo tanto,

$$\sqrt{4x^2+8x+10} = \sqrt{(2(x+1))^2 + (\sqrt{6})^2} = \sqrt{z^2+\rho^2}.$$

b) Se puede verificar directamente (**¡hacerlo!**) que

$$\sqrt{2x^2-2x-1} = \sqrt{(2(x+1))^2 - \frac{3}{2}} = \sqrt{z^2-\rho^2},$$

donde $z = 2(x+1)$ y $\rho = \sqrt{\frac{3}{2}}$.

c) Consideremos ahora la expresión $\sqrt{-2x^2+6x+2}$.

$$\begin{aligned} -2x^2+6x+2 = -2(x^2-3x)+2 &= -2\left(x^2-3x+\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2\right)+2 \\ &= -2\left(x^2-3x+\left(\frac{3}{2}\right)^2\right)+2\left(\frac{3}{2}\right)^2+2 \\ &= \frac{13}{2}-2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 \\ &= \rho^2-z^2, \qquad z=\sqrt{2}\left(x-\frac{3}{2}\right), \qquad \rho=\sqrt{\frac{13}{2}}. \end{aligned}$$

De donde $\sqrt{-2x^2+6x+2}=\sqrt{\rho^2-z^2}$.

2.- Calcular la integral $\int x^2\sqrt{3-2x-x^2}dx$.

Vamos a proceder a completar cuadrados en la expresión $3-2x-x^2$. En este caso tenemos que

$$\begin{aligned} 3-2x-x^2 = 3-(x^2+2x) &= 3-(x^2+2x+1-1) \\ &= 3-((x+1)^2-1) = 4-(x+1)^2 = 4-z^2, \end{aligned}$$

donde $z=x+1$ o $x=z-1$. Por lo tanto,

$$\int x^2\sqrt{3-2x-x^2}dx = \int x^2\sqrt{4-(x+1)^2}dx = \int (z-1)^2\sqrt{4-z^2}dz.$$

Si hacemos la sustitución trigonométrica $z=2\operatorname{sen}(\alpha)$, tendremos que $dx=2\cos(\alpha)d\alpha$ y en consecuencia,

$$\begin{aligned} \int x^2\sqrt{3-2x-x^2}dx &= \int x^2\sqrt{(4-(x+1)^2}dx \\ &= \int (z-1)^2\sqrt{4-z^2}dz \\ &= \int (2\operatorname{sen}(\alpha)-1)^2\,\sqrt{4-(2\operatorname{sen}(\alpha))^2}(2\cos(\alpha))d\alpha \\ &= \int (2\operatorname{sen}(\alpha)-1)^2\,\sqrt{4-4\operatorname{sen}^2(\alpha)}(2\cos(\alpha))d\alpha. \end{aligned}$$

Notemos que

$$(2\operatorname{sen}(\alpha)-1)^2 = 4\operatorname{sen}^2(\alpha)-4\operatorname{sen}(\alpha)+1, \qquad \sqrt{4-4\operatorname{sen}^2(\alpha)} = 2\cos^2(\alpha).$$

Reemplazando encontramos que

$$\int x^2\sqrt{3-2x-x^2}dx = 4\int\left(4\operatorname{sen}^2(\alpha)\cos^2(\alpha)-4\operatorname{sen}(\alpha)\cos^2(\alpha)+\cos^2(\alpha)\right)d\alpha.$$

Dejamos al lector la finalización del ejercicio. Recordemos que las identidades

$$\operatorname{sen}^2(\alpha) = \frac{1-\cos 2(\alpha)}{2} \qquad \text{y} \qquad \cos^2(\alpha) = \frac{1+\cos 2(\alpha)}{2},$$

son útiles para determinar integrales trigonométricas de la forma

$$\int \operatorname{sen}^2(\alpha)\cos^2(\alpha)d\alpha \qquad \text{o} \qquad \int \cos^2(\alpha)d\alpha.$$

Ejercicios

Resolver usando sustitución trigonométrica.

1. $\displaystyle\int \frac{1}{(25-x^2)^{3/2}}\,dx.$
2. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{25-x^2}}\,dx.$
3. $\displaystyle\int \frac{3}{x^2+x-2}\,dx.$
4. $\displaystyle\int \frac{5-x}{2x^2+x-1}\,dx.$
5. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{25-x^2}}{x}\,dx.$
6. $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{4x^2+16}}\,dx.$
7. $\displaystyle\int \sqrt{16-4x^2}\,dx.$
8. $\displaystyle\int x\sqrt{16-4x^2}\,dx.$
9. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2-9}}\,dx.$
10. $\displaystyle\int \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}\,dx.$
11. $\displaystyle\int \frac{x^2}{(1-x^2)^{3/2}}\,dx.$
12. $\displaystyle\int \frac{x^4}{(1-x^2)^{5/2}}\,dx.$
13. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^4}\,dx.$
14. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{4y^2+9}}{y^4}\,dy.$
15. $\displaystyle\int \frac{1}{x(\sqrt{4x^2+9})}\,dx.$
16. $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2+3)^{3/2}}\,dx.$
17. $\displaystyle\int \frac{x}{(x^2+3)^{3/2}}\,dx.$
18. $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2-4}}\,dx.$
19. $\displaystyle\int y^3\sqrt{y^2-4}\,dy.$
20. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{u^2+4}}{u}\,du.$
21. $\displaystyle\int \frac{1}{(1+x^2)^3}\,dx.$
22. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{4w-w^2}}\,dw.$
23. $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}\,dx.$
24. $\displaystyle\int x^2\sqrt{x^2-4}\,dx.$
25. $\displaystyle\int \frac{x+3}{\sqrt{3-2x-x^2}}\,dx.$
26. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{2z-z^2}}\,dz.$
27. $\displaystyle\int \frac{w}{\sqrt{5+12w-9w^2}}\,dw.$
28. $\displaystyle\int \sqrt{4x^2+4x-3}\,dx.$
29. $\displaystyle\int \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+2x+5}}\,dx.$
30. $\displaystyle\int \frac{x+4}{(6x-x^2)^{3/2}}\,dx.$

1.3. Evaluación del Primer Capítulo

1.- a). Encuentre una función diferenciable h tal que

$$\begin{cases} \dfrac{dh(z)}{dz} &= 5z^{1/3}\ln(z) - 4\cos^2(4z), \\ h(1) &= 4. \end{cases}$$

b). Un automóvil viaja a 100 km/h cuando el conductor observa que se ha presentado un accidente a 80 metros adelante y frena rápidamente. ¿Qué desaceleración constante se requiere para detener a tiempo el automóvil antes de que ocurra una colisión?

2.- $\displaystyle\int e^{-3w}\cos(4w)\,dw.$

3.- $\displaystyle\int y\sqrt[3]{2y+5}\,dy.$

4.- $\displaystyle\int \frac{\tan^5(y)}{\sec^{2/3}(y)}\,dy.$

5.- $\displaystyle\int \frac{z}{\sqrt{z^2+4z+3}}\,dz.$

6.- $\displaystyle\int \frac{5x^2+14x+17}{(x-1)(x+2)(x^2+2x+3)}\,dx.$

Capítulo 2

La integral definida y aplicaciones

2.1. El concepto de área

Consideremos una curva cerrada C contenida en el plano xy y sea R la región del plano limitada por la curva C. Estamos interesados en caracterizar un número real, denotado por $\mathcal{A}(R)$, que representa la "medida" de la región R. Esta medida será denominada área de R.

El ejemplo más simple de una región en el plano a la cual le podemos asignar una medida es un triángulo T. En este caso, si b representa la longitud de la base y h representa la altura del triángulo tomado sobre esta base del triángulo (ver Figura 2.1.1), entonces el área de T viene dada por

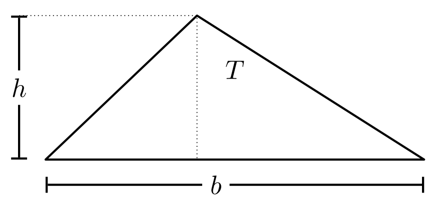


Figura 2.1.1: Área del triángulo.

$$\mathcal{A}(T) = \frac{1}{2}\, b\, h.$$

Notemos que el área para regiones del plano que se puedan descomponer en triángulos está perfectamente determinada. Este es el caso de las regiones rectangulares. Más aún, si R es una región del plano limitada por una curva cerrada poligonal C (formada por segmentos de línea, ver por ejemplo la Figura 2.1.2), entonces $\mathcal{A}(R)$ está bien definida, pues la región R se puede subdividir en un número finito de triángulos.

En consecuencia, el área de la región R, $\mathcal{A}(R)$, viene dada por

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(R) &= \mathcal{A}(R_1) + \mathcal{A}(R_2) + \mathcal{A}(R_3) + \mathcal{A}(R_4) + \cdots + \mathcal{A}(R_8)\\ &= \sum_{1}^{8} \mathcal{A}(R_i),\end{aligned}$$

donde R_i denota la i-ésima región triangular de la subdivisión de la región R.

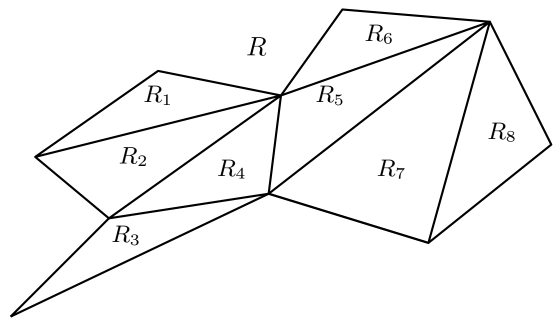


Figura 2.1.2: Descomposición en triángulos.

La pregunta natural que surge después de esta discusión es cómo estimar $\mathcal{A}(R)$ cuando la región R está limitada por una curva cerrada C, la cual no necesariamente es poligonal, como por ejemplo la de la Figura 2.1.3.

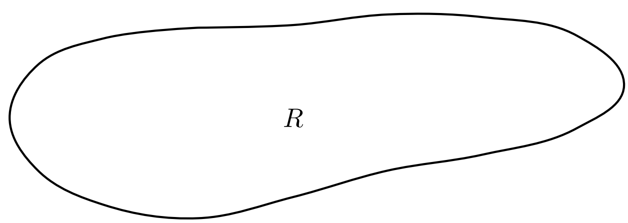


Figura 2.1.3: Región R limitada por la curva cerrada C.

Una primera aproximación para determinar una posible respuesta consiste tomar n puntos sobre la curva C y construir una curva poligonal C denotada con C_n. Note que esta curva C_n determina una región poligonal R_n cuya área $\mathcal{A}(R_n)$ está bien definida (ver Figura 2.1.4).

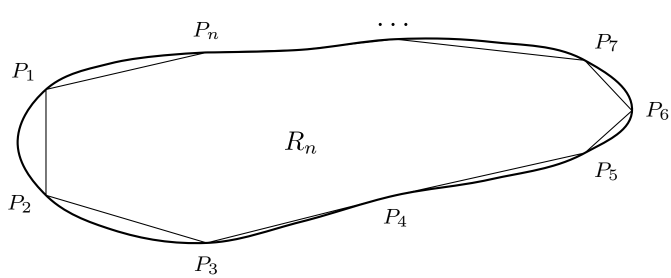


Figura 2.1.4: Aproximación más fina.

Más aún, si n es suficientemente grande, entonces la poligonal C_n aproxima "mejor" la curva C, y por lo tanto, la región poligonal R_n se aproxima a la región R.

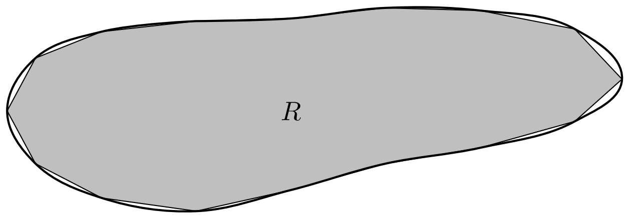


Figura 2.1.5: Aproximación de la región.

En otras palabras, el área de la región R, $\mathcal{A}(R)$, se debe interpretar como un proceso de límite. Más concretamente,

DEFINICIÓN 2.1 (**Área**). Sea C una curva cerrada en el plano xy y sea R la región limitada por C. Diremos que la región R tiene área finita, si existe un número real $\mathcal{A}(R)$ tal que

$$\mathcal{A}(R) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{A}(R_n) \tag{2.1}$$

sobre todas las regiones poligonales R_n limitadas por curvas poligonales C_n definidas sobre la curva C.

Es importante observar que si $\mathcal{A}(R)$ existe, entonces el límite es independiente de la subdivisión de la región R. Este hecho se puede demostrar en un curso más avanzado que contenga elementos de análisis real. Teniendo esto en mente, el cálculo del área, $\mathcal{A}(R)$, como un proceso de límite se reduce a efectuar las estimaciones para una subdivisión particular de la región R.

EJEMPLO 2.2. Sea R la región del plano determinada por un semicírculo de radio r y su diámetro (ver Figura 2.1.6). Vamos a verificar que $\mathcal{A}(R) = \frac{1}{2}\pi r^2$.

Primero subdividamos el arco de π radianes en n subarcos de igual magnitud. Es decir, en n arcos de π/n radianes. Así el semicírculo R se puede aproximar por una región poligonal R_n subdivida en n triángulos T_n, todos de igual área (ver Figura 2.1.6).

Por lo tanto, $\mathcal{A}(T_i) = \mathcal{A}(T_1)$ para $i = 1, 2, \cdots, n$. Así que

$$\mathcal{A}(R) \approx \mathcal{A}(R_n) = \mathcal{A}(T_1) + \mathcal{A}(T_2) + \mathcal{A}(T_3) + \cdots + \mathcal{A}(T_n) = n\mathcal{A}(T_1).$$

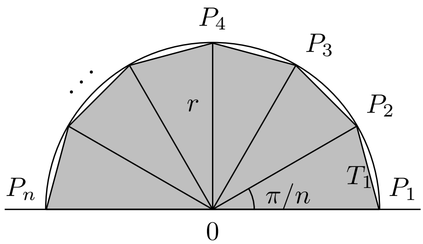


Figura 2.1.6: Subdivisión semicírculo.

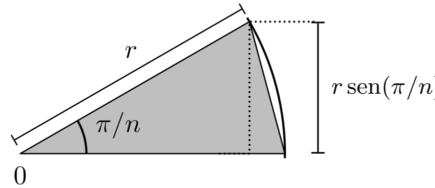


Figura 2.1.7: Área del triángulo T_1 con ángulo π/n y base r.

Pero un cálculo simple muestra que $\mathcal{A}(T_1) = \frac{1}{2}r^2\,\mathrm{sen}(\pi/n)$ (ver Figura 2.1.7). Luego

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(R) \approx \mathcal{A}(R_n) &= n\mathcal{A}(T_1) = n\cdot\frac{1}{2}r^2\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)\\ &= n\cdot\frac{1}{2}r^2\left(\frac{\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{\pi}{n}}\right)\left(\frac{\pi}{n}\right) = \frac{1}{2}\pi r^2\left(\frac{\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{\pi}{n}}\right).\end{aligned}$$

De otro lado, haciendo la sustitución $y = \frac{\pi}{n}$, vemos que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{\pi}{n}} = \lim_{y\to 0^+}\frac{\mathrm{sen}(y)}{y} = 1.$$

Como consecuencia de lo anterior,

$$\mathcal{A}(R) = \lim_{n\to\infty}\mathcal{A}(R_n) = \frac{1}{2}\pi r^2\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{\pi}{n}}\right) = \frac{1}{2}\pi r^2.$$

2.1.1. Sobre sumatorias. Con el propósito de realizar el cálculo explícito de algunas integrales definidas sencillas, vamos a presentar algunas propiedades básicas para sumatorias y fórmulas.

Propiedades:

1. $\sum_{i=1}^{n}(a_i + \alpha b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \alpha\sum_{i=1}^{n} b_i$, con $\alpha\in\mathbb{R}$ (linealidad).
2. $\sum_{i=1}^{n}\alpha = \alpha n$, con $\alpha\in\mathbb{R}$.
3. $\sum_{i=1}^{n} i = \dfrac{n(n+1)}{2}$.
4. $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
5. $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Ejemplo 2.3. Utilizar las propiedades y fórmulas para calcular

$$\sum_{i=1}^{5}(4i^2 - 2i + 6).$$

Solución.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{5}(4i^2-2i+6) &= 4\sum_{i=1}^{5}i^2-2\sum_{i=1}^{5}i+6\sum_{i=1}^{5}1\\ &= 4\left(\frac{(5)(6)(11)}{6}\right)-2\left(\frac{(5)(6)}{2}\right)+6(5)=220.\end{aligned}$$

2.2. Área bajo la gráfica de una función continua y positiva

Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función continua y positiva. Denotemos con R a la región del plano limitada por la gráfica de f, las rectas $x=a$ y $x=b$, y el eje x $(y=0)$.

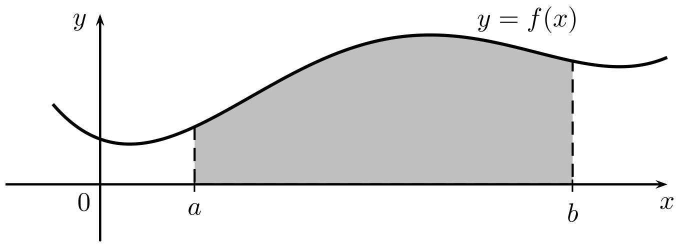
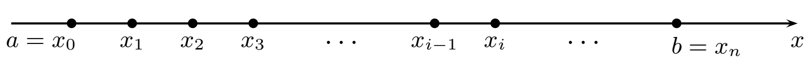


Figura 2.2.1: Área bajo la gráfica de una función en el intervalo $[a,b]$.

Definición 2.4 (**Partición**). Una partición $\mathcal{P}$ de $[a,b]$ es una subdivisión de $[a,b]$ en subintervalos de la forma $[x_{i-1},x_i]$, donde

$$x_0=a<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b.$$



Denotaremos con Δx_i a la longitud del intervalo $[x_{i-1},x_i]$. Es decir, $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$, y la norma de la partición $\mathcal{P}$ se define como,

$$\|\mathcal{P}\|_{[a,b]}:=\text{máx}\{\Delta x_1,\Delta x_2,\Delta x_3,\cdots\Delta x_n\}.$$

Ejemplos 2.5. Determine la norma de la partición $\mathcal{P}$ del intervalo $I=[1,3]$ dada por $x_0=1$, $x_1=\frac{3}{2}$, $x_2=\frac{13}{8}$, $x_3=2$, $x_4=\frac{9}{4}$, $x_5=\frac{5}{2}$, $x_6=3$. Entonces $\Delta_1 x=x_1-x_0=\frac{1}{2}$, $\Delta_2 x=x_2-x_1=\frac{1}{8}$, $\Delta_3 x=x_3-x_2=\frac{3}{8}$, $\Delta_4 x=x_4-x_3=\frac{1}{4}$, $\Delta_5 x=x_5-x_4=\frac{1}{4}$, $\Delta_6 x=x_6-x_5=\frac{1}{2}$. Por lo tanto, la norma de la partición es

$$\|\mathcal{P}\|_{[1,3]}:=\text{máx}\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{8},\frac{3}{8},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right\}=\frac{1}{2}.$$

En adelante diremos que la partición $\mathcal{P}$ de $[a,b]$ es **regular**, si la longitud de los subintervalos es igual. En este caso para $i = 1, 2, \cdots, n$,

$$\Delta_i x = x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n} := \Delta x \quad \text{y} \quad x_i = x_{i-1} + \Delta x = x_0 + i\left(\frac{b-a}{n}\right).$$

Note que en este caso la norma de la partición es

$$\|\mathcal{P}\|_{[a,b]} = \left(\frac{b-a}{n}\right) = \Delta x.$$

Ejemplos 2.6. Dado el intervalo $I = [1,3]$, determine una partición regular $\mathcal{P}$ de I con $n = 6$. Utilizando la notación anterior

$$\Delta_i x = \frac{3-1}{6} = \frac{1}{3} = \Delta x \quad \text{y} \quad x_i = x_{i-1} + \frac{1}{3} = 1 + \frac{1}{3}\, i.$$

Por lo tanto, $x_0 = 1$, $x_1 = \frac{4}{3}$, $x_2 = \frac{5}{3}$, $x_3 = 2$, $x_4 = \frac{7}{3}$, $x_5 = \frac{8}{3}$, $x_6 = 3$. Además, $\|\mathcal{P}\|_{[1,3]} = \frac{1}{3}$.

Con el fin de estimar el área $\mathcal{A}(R)$ bajo la gráfica de f sobre el intervalo $[a,b]$, construyamos rectángulos sobre cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ tomando como altura h_i al valor de f en algún punto $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$ (ver Figura 2.2.2). Es decir, $h_i = f(x_i^*)$.

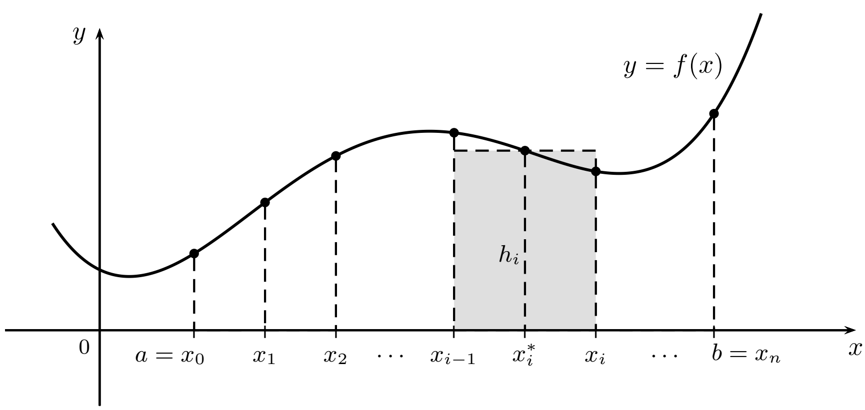


Figura 2.2.2: Estimación del área $\mathcal{A}(R)$ bajo la gráfica de f sobre el intervalo $[a,b]$.

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(R) &\approx f(x_1^*)\Delta_1 x + f(x_2^*)\Delta_2 x + f(x_3^*)\Delta_3 x + \cdots + f(x_n^*)\Delta_n x \\ &\approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta_i x.\end{aligned}$$

Así, intuitivamente se tiene que

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(R) &= \lim_{n\to\infty}\left(f(x_1^*)\Delta_1 x + f(x_2^*)\Delta_2 x + f(x_3^*)\Delta_3 x + \cdots + f(x_n^*)\Delta_n x\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta_i x,\end{aligned}$$

sobre todas las particiones $\mathcal{P}$ de $[a,b]$.

En adelante llamaremos sumas de **Riemann** a las sumas de la forma

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta_i x,$$

asociadas con la partición $\mathcal{P}$ de $[a,b]$, $x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$, donde $\Delta_i x = x_i - x_{i-1}$ y $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$.

OBSERVACIÓN 2.7. Como en la discusión general de área, el cálculo del área bajo la gráfica de una función continua y positiva, cuando ésta existe, puede realizarse utilizando una partición **regular** del intervalo $[a,b]$ y efectuando una escogencia arbitraria de $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$.

EJEMPLOS 2.8. Sea $f(x) = x + 1$ definida sobre el intervalo $[0,1]$. Note que f es continua y positiva.

Claramente sabemos que el área de este trapecio es $\mathcal{A}(R) = 3/2$ (ver Figura 2.2.3). Para realizar el estimativo de $\mathcal{A}(R)$ vía el límite de las sumas de Riemann, vamos a escoger una partición regular del intervalo $[0,1]$. Es decir, dado $n \in \mathbb{N}$, vamos a subdividir $[0,1]$ en n subintervalos definiendo la siguiente partición con norma $\|\mathcal{P}\|_{[0,1]} = \frac{1-0}{n} = \frac{1}{n} = \Delta x$. Más aún,

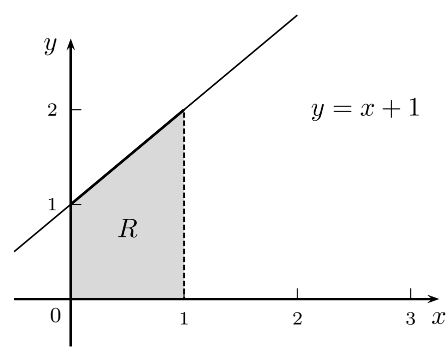


Figura 2.2.3: Región trapezoidal limitada por $f(x) = x + 1$ y las rectas $y = 0$, $x = 0$ y $x = 1$.

$$x_0 = 0, \quad x_1 = x_0 + \Delta x = \frac{1}{n}, \quad x_2 = x_1 + \Delta x = \frac{2}{n}, \quad \cdots, \quad x_i = \frac{i}{n}.$$

Para definir la altura h_i sobre cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, tomamos el valor de f en el extremo derecho del intervalo. Esto es, $x_i^* = x_i$ y $h_i = f(x_i) = x_i + 1 = \frac{i}{n} + 1$. En el cálculo que vamos a realizar utilizaremos que $\sum_{i=1}^{n} i = \dfrac{n(n+1)}{2}$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(R) &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta_i x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (x_i+1)\Delta x \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (x_i+1)\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{n}+1\right)\left(\frac{1}{n}\right), \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n^2}+\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2}\frac{(n(n+1))}{2} + \left(\frac{1}{n}\right)n\right) = \frac{1}{2}+1 = \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

Observación 2.9. Observemos que la función $f(x) = x+1$ tiene como una antiderivada a la función $F(x) = (\frac{1}{2})x^2 + x + C$. Si definimos $F(x)\big|_a^b := F(b) - F(a)$, entonces podemos ver que

$$\mathcal{A}(R) = F(x)\big|_0^1 : F(1) - F(0) = \left(\frac{1}{2}+1+C\right) - (0+C) = \frac{3}{2}.$$

En otras palabras, de forma coincidencial como en el ejemplo anterior, el cálculo del área $\mathcal{A}(R)$ se reduce también a encontrar una antiderivada de f y evaluarla en los extremos del intervalo. Vamos a verificar que este hecho es consecuencia del **Teorema Fundamental de Cálculo**.

Ejemplo 2.10. Sea $f(x) = x^2$ definida sobre el intervalo $[0,2]$. Note que f es continua y positiva.

Para calcular $\mathcal{A}(R)$ vía el límite de las sumas de Riemann, vamos a escoger una partición regular del intervalo $[0,2]$. Es decir, dado $n \in \mathbb{N}$, vamos a subdividir $[0,2]$ en n subintervalos definiendo la siguiente partición con norma $\|\mathcal{P}\|_{[0,1]} = \frac{2}{n} = \Delta x$.

$$x_0 = 0, \quad x_1 = \frac{2}{n}, \quad x_2 = \frac{4}{n}, \cdots, x_i = \frac{2i}{n}.$$

Para definir la altura h_i sobre cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, tomamos el valor de f en el extremo derecho. Esto es, $x_i^* = x_i$ y $h_i = f(x_i) = \left(\frac{2i}{n}\right)^2 = \frac{4i^2}{n^2}$. Para los cálculos debemos recordar que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Por lo tanto,

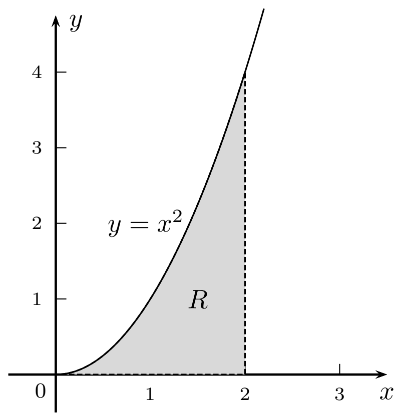


Figura 2.2.4: Región limitada por $f(x) = x^2$ y las rectas $y = 0$ y $x = 2$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(R) &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta_i x \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{4i^2}{n^2}\left(\frac{2}{n}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{8}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2 \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{8}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{8n(n+1)(2n+1)}{6n^3} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{4\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}{3} = \frac{8}{3}.
\end{aligned}$$

Observación 2.11. Como en el ejemplo anterior, la función $f(x) = x^2$ tiene como una antiderivada a la función $F(x) = (\frac{1}{3})x^3 + C$. En este caso también se verifica que

$$\mathcal{A}(R) = F(x)\big|_0^2 = F(2) - F(0) = \left(\frac{8}{3} + C\right) - (0 + C) = \frac{8}{3}.$$

En otras palabras, de forma coincidencial como en el ejemplo anterior, el cálculo del área $\mathcal{A}(R)$ se reduce también a encontrar una antiderivada de f y evaluarla en los extremos del intervalo. Vamos a verificar que este hecho es consecuencia del **Teorema Fundamental de Cálculo**.

El resultado que garantiza la existencia del área bajo la gráfica para funciones continuas y positivas es el siguiente teorema:

Teorema 2.12. *Sean $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua y positiva y R la región del plano limitada por la gráfica de f, las rectas $x = a$ y $x = b$, y el eje x ($y = 0$). Entonces el área de R, $\mathcal{A}(R)$, existe y viene dada por*

$$\mathcal{A}(R) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta_i x,$$

sobre todas las particiones $\mathcal{P}$ de $[a, b]$, $x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$, donde $\Delta_i x = x_i - x_{i-1}$ y $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$. En adelante denotaremos $\mathcal{A}(R)$ como

$$\mathcal{A}(R) = \int_a^b f(t)\,dt.$$

Observemos que la discusión presentada para funciones continuas y positivas se puede extender de forma directa al caso de funciones continuas que cambien de signo (ver Figura 2.2.5).

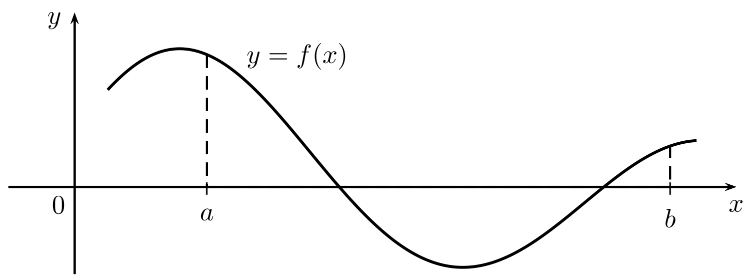


Figura 2.2.5: Función continua que cambia de signo.

En particular, las sumas de Riemann tiene sentido aún cuando la función tome valores negativos. Debe ser completamente claro que si la función continua cambia de signo, entonces el resultado del límite **no representa área**. Podemos pensar que la integral definida representa la diferencia entre las áreas de las región en donde la función es positiva y la región en donde la función es negativa. Para ilustrar un poco lo anterior, consideremos una función continua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ y definamos la parte positiva f^+ de f y la parte negativa f^- de f por

$$f^+(s) = \begin{cases} f(s), & \text{si } f(s) \geq 0, \\ 0, & \text{si } f(s) < 0, \end{cases} \qquad \text{y} \qquad f^-(s) = \begin{cases} -f(s), & \text{si } f(s) \leq 0, \\ 0, & \text{si } f(s) > 0. \end{cases}$$

En la Figura 2.2.6 se presentan las gráficas de f^+ y f^-, respectivamente.

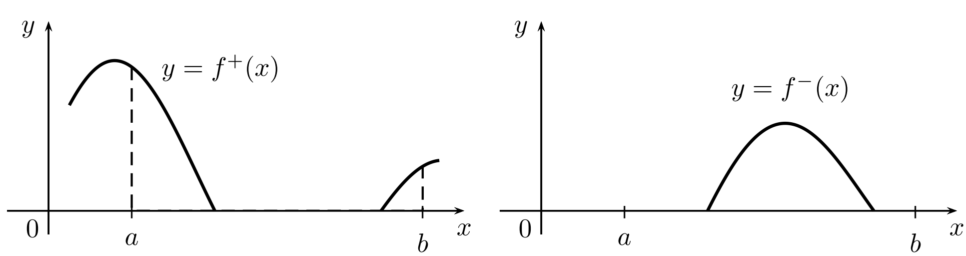


Figura 2.2.6: Gráficas de las funciones f^+ y f^-, respectivamente.

En particular, se verifica directamente que $f = f^+ - f^-$, con f^+ y f^- funciones continuas y no negativas ($f^+, f^- \geq 0$) sobre el intervalo $[a, b]$. Por lo tanto,

$$\int_a^b f^+(s)\,ds = A^+ \quad \text{(área de la región en donde } f \text{ es positiva)},$$

y

$$\int_a^b f^-(s)\,ds = A^- \quad \text{(área de la región en donde } f \text{ es negativa)}.$$

Como consecuencia de lo anterior,

$$\begin{aligned}\int_a^b f(s)\,ds &= \int_a^b (f^+(s) - f^-(s))\,ds = \int_a^b f^+(s)\,ds - \int_a^b f^-(s)\,ds \\ &= A^+ - A^-.\end{aligned}$$

En otras palabras, si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función continua, entonces la integral definida $\int_a^b f(s)\,ds$ representa la diferencia entre el área A^+ de la región en donde f es positiva y el área A^- de la región donde f es negativa. En general se tiene el siguiente resultado.

TEOREMA 2.13. *Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función continua, entonces existe un número real $\mathcal{I}(R)$ tal que*

$$\mathcal{I}(R) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta_i x,$$

sobre todas las particiones $\mathcal{P}$ de $[a, b]$,

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$

donde $\Delta_i x = x_i - x_{i-1}$ y $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$. En adelante denotaremos $\mathcal{I}(R)$ como

$$\mathcal{I}(R) = \int_a^b f(t)\,dt,$$

y la llamaremos integral definida de f sobre $[a, b]$.

La discusión hecha en el caso de funciones continuas definidas sobre $[a, b]$ se puede extender al caso de funciones **no necesariamente continuas**. En realidad, la única condición que se requiere para que las sumas de Riemann tengan sentido es que la función f esté limitada o acotada. Es decir, existen constantes m y M tales que

$$m \leq f(x) \leq M, \quad \text{para todo } x \in [a, b].$$

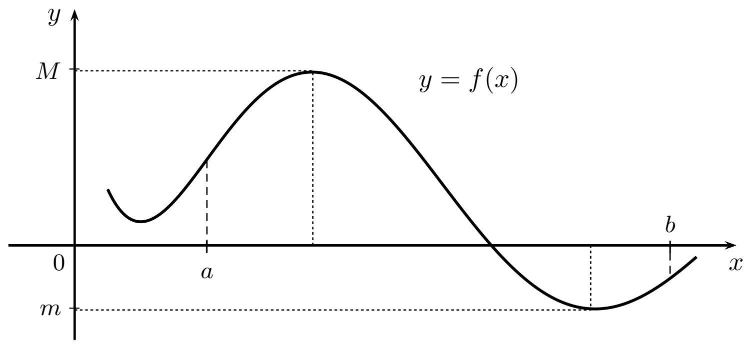


Figura 2.2.7: Gráfica de una función acotada en $[a,b]$: $m \leq f(x) \leq M$, $\forall x \in [a,b]$, con $m, M \in \mathbb{R}$.

A diferencia del caso cuando f es una función continua, en general no podemos garantizar la existencia del límite de las sumas de Riemann sobre todas las particiones, pero es posible establecer la definición de **integral definida** para funciones acotadas.

DEFINICIÓN 2.14 (**Integral definida**). Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función acotada en $[a,b]$ ($m \leq f(x) \leq M$, para todo $x \in [a,b]$). Diremos que f es **Riemann integrable** en $[a,b]$, si existe un número real $\mathcal{I}$ tal que

$$\mathcal{I} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta_i x,$$

sobre todas las particiones $\mathcal{P}$ de $[a,b]$,

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$

donde $\Delta_i x = x_i - x_{i-1}$ y $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$. En adelante denotaremos $\mathcal{I}$ como

$$\mathcal{I} = \int_a^b f(t)\,dt,$$

y la llamaremos integral definida de f sobre $[a,b]$.

OBSERVACIÓN 2.15.
1. De la discusión anterior, toda función continua sobre un intervalo cerrado $[a,b]$ es Riemann integrable sobre $[a,b]$.
2. En particular, funciones continuas a trozos que sean **acotadas** sobre un intervalo cerrado $[a,b]$ son Riemann integrables sobre $[a,b]$.
3. Suma de funciones Riemann integrables sobre $[a,b]$ son Riemann integrables sobre $[a,b]$.

4. **No toda función acotada es Riemann integrable.** En efecto, consideremos la función característica $\chi_{\mathbb{Q}}$ de los números racionales sobre un intervalo $[a,b]$, definida como
$$\chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } \; x \in [a,b] \cap \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{si } \; x \in [a,b] \cap \mathbb{I}, \end{cases}$$
donde $\mathbb{Q}$ denota el conjunto de los números racionales e $\mathbb{I}$ denota el conjunto de los números irracionales. Dada cualquier partición $\mathcal{P}$ de $[a,b]$, digamos:
$$x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b,$$
y escojamos puntos
$$x_i^* \in [x_{i-1}, x_i] \cap \mathbb{Q} \qquad \text{y} \qquad x_i^+ \in [x_{i-1}, x_i] \cap \mathbb{I}.$$
Por lo tanto, para cada $1 \leq i \leq n$ tenemos que $\chi_{\mathbb{Q}}(x_i^*) = 1$ y $\chi_{\mathbb{Q}}(x_i^+) = 0$. Además, también tenemos que
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \chi_{\mathbb{Q}}(x_i^*) \Delta_i x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \Delta_i x = b - a.$$
De otro lado, tenemos que
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \chi_{\mathbb{Q}}(x_i^+) \Delta_i x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (0) \Delta_i x = 0.$$
En consecuencia, $\chi_{\mathbb{Q}}$ no puede ser Riemann integrable sobre $[a,b]$, pues todos los límites deberían ser iguales sobre cualquier escogencia de los x_i^* y x_i^+.

Teorema 2.16. *Sea f una función integrable sobre un intervalo cerrado $[\alpha, \beta]$. Entonces para toda $a, b, c \in [\alpha, \beta]$ se tiene que*

(1) $\displaystyle\int_a^a f(t)\,dt = 0.$ *(2)* $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = -\int_b^a f(t)\,dt.$

(3) $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt.$

Demostración. Vamos a hacer una demostración geométrica de la propiedad (3) en el caso en que f sea continua y positiva sobre $[\alpha, \beta]$, para utilizar el concepto de área estudiado atrás. En primer lugar, notemos que en la propiedad (3) no se exige que a, b y c estén ordenados como $a < b < c$. Primero supongamos que efectivamente $a < c < b$ (ver Figura 2.2.8).

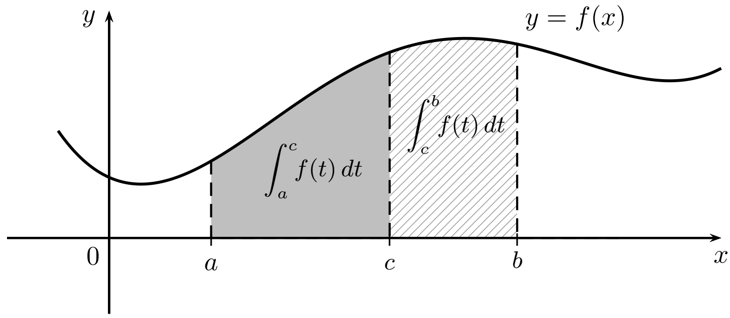


Figura 2.2.8: Gráfica de una función $f(x)$ donde $a < c < b$.

En este caso, recordemos que para f no negativa tenemos que

$$\int_a^c f(t)\,dt = \mathcal{A}_a^c(f) \quad \text{y} \quad \int_c^b f(t)\,dt = \mathcal{A}_c^b(f),$$

donde $\mathcal{A}_a^c(f)$ denota el área bajo la gráfica de f sobre $[a, c]$ y $\mathcal{A}_c^b(f)$ denota el área bajo la gráfica de f sobre $[c, b]$. Dado que,

$$\int_a^b f(t)\,dt = \mathcal{A}_a^b(f) \quad \text{(área bajo la gráfica sobre } [a, b])$$

entonces concluimos que efectivamente

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt.$$

Ahora supongamos por ejemplo que $a < b < c$ (ver Figura 2.2.9).

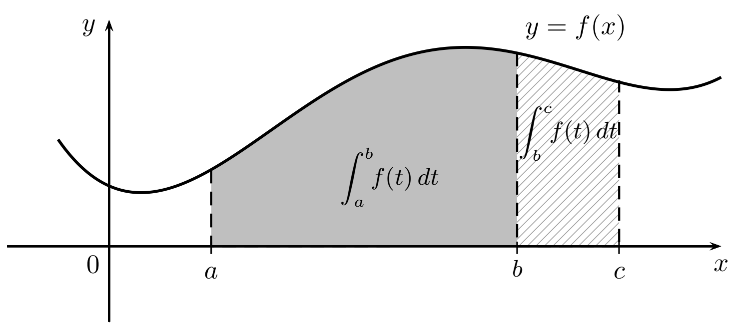


Figura 2.2.9: Gráfica de una función $f(x)$ donde $a < b < c$.

Entonces utilizando el primer caso y la propiedad (2) concluimos que

$$\int_a^c f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_b^c f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt - \int_c^b f(t)\,dt,$$

lo cual es equivalente a

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt.$$

Ejemplo 2.17. Sea $f(x) = x^2 + 1$ definida en $[0, 4]$. Entonces se tiene que

$$\begin{aligned}\int_0^2 (x^2+1)\,dx &= \int_0^3 (x^2+1)\,dx + \int_3^2 (x^2+1)\,dx \\ &= \int_0^3 (x^2+1)\,dx - \int_2^3 (x^2+1)\,dx.\end{aligned}$$

Teorema 2.18 (**Linealidad**). *Sean f y g funciones integrables sobre $[a, b]$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces*

(1) $\displaystyle\int_a^b (f+g)(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_a^b g(t)\,dt.$

(2) $\displaystyle\int_a^b (\lambda f)(t)\,dt = \lambda \int_a^b f(t)\,dt.$

Demostración. Sea $\mathcal{P}$ una partición cualquiera de $[a, b]$ y sea $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$. Entonces,

$$\sum_{i=1}^{n} [f+\lambda g](x_i^*)\Delta_i x = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta_i x + \lambda \sum_{i=1}^{n} g(x_i^*)\Delta_i x.$$

dado que f y g son integrables, los límites del lado derecho existen sobre todas las particiones, y por lo tanto el límite del lado izquierdo existe sobre todas las particiones. En otras palabras,

$$\int_a^b (f+\lambda g)(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \lambda \int_a^b g(t)\,dt,$$

lo que demuestra (1) y (2).

Ejercicios

I.- En los problemas 1 a 6, calcule primero (en términos de m) la suma

$$\sum_{i=1}^{m} f(k_i)\Delta k.$$

Para aproximar el área A de la región bajo $y = f(k)$ sobre el intervalo $[e, f]$. Determine después A exactamente (como en los ejemplos 2.8 y 2.10) mediante el límite cuando $m \to \infty$.

1. $f(k) = k$ en $[0, 1]$.
2. $f(k) = k^2$ en $[0, 2]$.
3. $f(k) = k^3$ en $[0, 3]$.
4. $f(k) = k + 2$ en $[0, 2]$.
5. $f(k) = 5 - 3k$ en $[0, 1]$.
6. $f(k) = 9 - k^2$ en $[0, 3]$.

II.- En los problemas 1-5, **exprese el límite dado como una integral definida** en el intervalo indicado $[j, k]$. Suponga que $[x_{i-1}, x_i]$ denota el i-ésimo subintervalo de una subdivisión de $[j, k]$ en n subintervalos de igual longitud $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$, y que $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$.

1. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (2x_i^* - 1)\Delta x$ en $[1, 3]$.
2. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} ((x_i^*)^2 + 4)\Delta x$ en $[0, 10]$.
3. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{x_i^*}\Delta x$ en $[4, 9]$.
4. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1 + x_i^*}}\Delta x$ en $[3, 8]$.
5. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (\operatorname{sen} 2\pi x_i^*)\Delta x$ en $[\frac{1}{2}, 1]$.
6. Suponga que f es una función continua en $[p, q]$ y que r es una constante. Utilice sumas de Riemann para demostrar que
$$\int_a^b r f(y)dy = r \int_a^b f(y)dy.$$
7. Suponga que $f(z) = k$, una constante. Utilice sumas de Riemann para demostrar que
$$\int_a^b k dz = k(b - a).$$

III.- En los problemas (1) y (2) del ejercicio anterior, **calcule el límite dado** en el intervalo indicado $[j, k]$, tomando $x_i^* = \frac{1}{2}(x_{i-1} + x_i)$ (punto medio del i-ésimo subintervalo).

2.3. Teorema Fundamental del Cálculo – Evaluación de integrales definidas

En esta sección vamos a verificar que para funciones continuas, la integral definida

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

se puede calcular evaluando una antiderivada de f. Es decir,

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

donde F es una antiderivada de $f \quad (F'(x) = f(x))$.

Esta propiedad se conoce como uno de los resultados más importantes del curso de Cálculo:

Teorema 2.19 (**Teorema Fundamental del Cálculo (TFC)**). *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua y definamos $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ por*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

Entonces, F es una antiderivada de $f \quad (F' = f)$.

Más aún, si G es una antiderivada de f, entonces

$$\int_a^b f(t)\,dt = G(x)\Big|_a^b = G(b) - G(a).$$

Los siguientes resultados son una consecuencia directa de este importante resultado,

1.- $F'(x) = \dfrac{d}{dx}\left(F(x)\right) = \dfrac{d}{dx}\left(\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt\right) = f(x).$

2.- Si f es diferenciable en $[a, b]$,

$$\int_a^x f'(t)\,dt = \int_a^x \frac{d}{dt}(f(t))\,dt = f(x) - f(a).$$

Demostración. Vamos a presentar una prueba heurística del (**TFC**) cuando la función f es no negativa y continua en $I = [a, b]$. Consideremos la función área $\mathcal{A} : [a, b] \to \mathbb{R}$ asociada con una función continua y positiva $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ definida como

$$\mathcal{A}(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

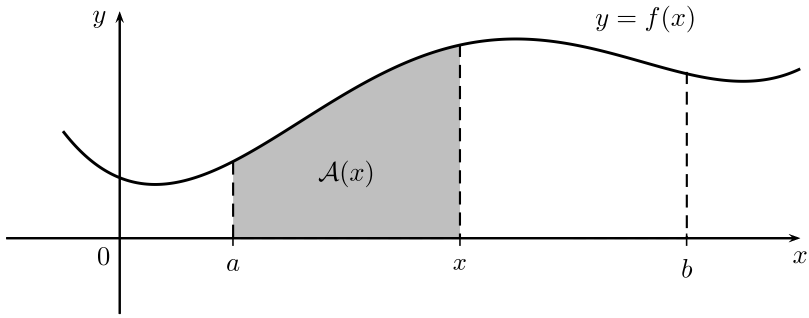


Figura 2.3.1: Interpretación geométrica de la función $\mathcal{A}(x)$.

En primer lugar de las propiedades de la integral definida,

$$\mathcal{A}(a) = \int_a^a f(t)\,dt = 0 \qquad \text{y} \qquad \mathcal{A}(b) = \int_a^b f(t)\,dt.$$

Vamos a mostrar de forma heurística que $\mathcal{A}$ es una antiderivada de f $(\mathcal{A}'(x) = f(x))$. Note que de acuerdo con las propiedades anteriores $\mathcal{A}(a) = 0$ y

$$\int_a^b f(x)\,dx = \mathcal{A}(b) = \mathcal{A}(b) - \mathcal{A}(a) \; = \; \mathcal{A}(x)\big|_a^b,$$

mostrando que efectivamente el cálculo de la integral definida de f sobre $[a,b]$ corresponde a la evaluación de la antiderivada $\mathcal{A}$ de f.

Recordemos que

$$\mathcal{A}'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{\mathcal{A}(x_0+h) - \mathcal{A}(x_0)}{h}.$$

De otro lado, para $h > 0$,

$$\mathcal{A}(x_0+h) - \mathcal{A}(x_0) = \int_{x_0}^{x_0+h} f(x)\,dx$$

representa el área bajo la gráfica de f entre x_0 y $x_0 + h$ (ver Figura 2.3.2).

Notemos que dicha área para h suficientemente pequeño se puede aproximar como el área del rectángulo con base el intervalo $[x_0, x_0 + h]$ y altura $f(x_0)$. Es decir, para h suficientemente pequeño,

$$\mathcal{A}(x_0+h) - \mathcal{A}(x_0) = \int_{x_0}^{x_0+h} f(x)\,dx \approx f(x_0)h$$

En consecuencia,

$$\frac{\mathcal{A}(x_0+h) - \mathcal{A}(x_0)}{h} \approx f(x_0).$$

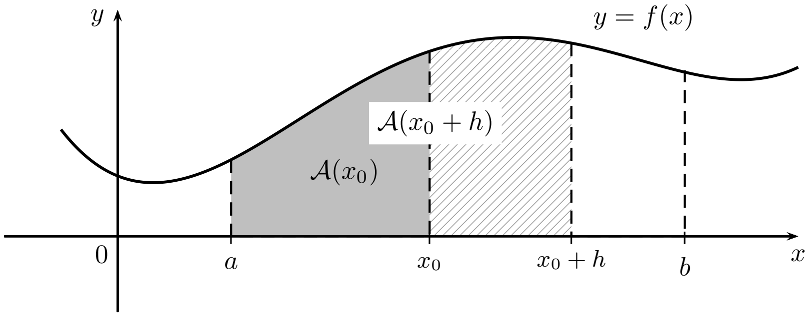


Figura 2.3.2: Representación geométrica de $\mathcal{A}(x_0)$ y $\mathcal{A}(x_0 + h)$.

Si $h < 0$ se obtiene la misma conclusión pues en este caso,

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(x_0 + h) - \mathcal{A}(x_0) &= \int_{x_0}^{x_0+h} f(x)\,dx \\ &= -\int_{x_0+h}^{x_0} f(x)\,dx \approx -[f(x_0)(-h)] = f(x_0)h.\end{aligned}$$

Tomando límite cuando $h \to 0$, concluimos que

$$\mathcal{A}'(x_0) = f(x_0).$$

Una demostración más detallada desde el punto de vista matemático requiere de elementos de Cálculo Avanzado o Análisis Básico.

Ejemplo 2.20. Sea $f(x) = 4x^3 + 6x^2 + 1$ sobre $[1, 2]$. Entonces,

$$\int_1^2 (4x^3 + 6x^2 + 1)\,dx = \left(x^4 + 2x^3 + x\right)\Big|_1^2 = 34 - 4 = 30.$$

Una de las consecuencias más relevantes del (**TFC**) es el Teorema del Valor Medio para Integrales:

Corolario 2.21 (**Teorema del Valor Medio para Integrales**). *Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función continua, existe $c \in (a, b)$ tal que*

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b - a).$$

Demostración. Definamos $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ por

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

Del Teorema Fundamental del Cálculo, F es diferenciable y una antiderivada para f. Más aún,

$$\int_a^b f(t)\,dt. = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Pero del Teorema del Valor Medio para derivadas, aplicado a la función F, sabemos que existe $c \in (a,b)$ tal que

$$F(b) - F(a) = F'(c)(b-a) = f(c)(b-a) \quad (F' = f).$$

Por lo tanto como queríamos verificar,

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a).$$

Ejemplos 2.22. Utilizar el Teorema Fundamental del Cálculo para calcular las derivadas de las funciones dadas.

1.- $G(x) = \displaystyle\int_1^x t^3\,dt.$ En este caso, $G'(x) = x^3$.

2.- $H(x) = \displaystyle\int_0^{3x} \sqrt{t^4+2}\,dt.$

Para realizar la derivada de H es necesario observar que H se puede descomponer como una función compuesta. En efecto, definamos las siguientes funciones

$$F(y) = \int_0^y \sqrt{t^4+2}\,dt, \quad g(z) = 3z.$$

Entonces, ¡ $H(x) = (F \circ g)(x) = F(3x)$! Note que

$$H'(x) = F'(3x)g'(x) = 3F'(3x).$$

Del TFC, $F'(y) = \sqrt{y^4+2}$. De modo que

$$H'(x) = 3\sqrt{(3x)^4+2}.$$

3.- $K(y) = \displaystyle\int_1^{3y^4-1} (1+e^z)^{1/3}\,dz.$

Como en el caso anterior, K se puede descomponer como una función compuesta. En efecto, definamos las siguientes funciones

$$R(w) = \int_1^w (1+e^z)^{1/3}\,dz \quad \text{y} \quad g(s) = 3s^4 - 1.$$

Entonces, ¡ $K(y) = (R \circ g)(y) = R(3y^4-1)$! Note que

$$K'(y) = R'(3y^4-1)g'(y) = 12y^3R'(3y^4-1).$$

Del TFC, $R'(w) = (1 + e^w)^{1/3}$ y además, $g'(s) = 12s^3$. De modo que

$$K'(y) = 12y^3(1 + e^{(3y^4-1)})^{1/3}.$$

4.- $S(t) = \displaystyle\int_{5t^3-1}^{2t^2+1} \operatorname{sen}(1 + w^3)\, dw.$

Para aplicar el TFC es necesario descomponer la integral de la siguiente forma

$$\begin{aligned} S(t) &= \int_{5t^3-1}^{1} \operatorname{sen}(1 + w^3)\, dw + \int_{1}^{2t^2+1} \operatorname{sen}(1 + w^3)\, dw \\ &= -\int_{1}^{5t^3-1} \operatorname{sen}(1 + w^3)\, dw + \int_{1}^{2t^2+1} \operatorname{sen}(1 + w^3)\, dw \\ &= \int_{1}^{2t^2+1} \operatorname{sen}(1 + w^3)\, dw - \int_{1}^{5t^3-1} \operatorname{sen}(1 + w^3)\, dw. \end{aligned}$$

Como en los ejemplos anteriores, es necesario evaluar en el límite superior, sin olvidar multiplicar por la derivada interna. Así que,

$$S'(t) = 4t \operatorname{sen}(1 + (2t^2 + 1)^3) - 15t^2 \operatorname{sen}(1 + (5t^3 - 1)^3).$$

5.- Sea f definida como

$$f(s) = \int_{1}^{s^3} \frac{\sqrt{1 + 2u}}{u^2}\, du.$$

Si $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(s)\, ds$, encuentre $F''(3)$.

En primer lugar, del **TFC** tenemos que $F'(x) = f(x)$. Por lo tanto, $F''(x) = f'(x)$. De nuevo aplicando el **TFC** tenemos que

$$f'(s) = (3s^2)\frac{\sqrt{1 + 2s^3}}{(s^3)^2} = \frac{3\sqrt{1 + 2s^3}}{s^4}.$$

En consecuencia, $F''(3) = f'(3) = \frac{3\sqrt{1+2(3)^3}}{3^4} = \frac{\sqrt{55}}{27}$.

6.- Encuentre una función f tal que para $x > 0$,

$$2x^7 - 4\int_1^{x^2} tf(t)\, dt = 2x^3.$$

Derivando ambos lados de la igualdad, y después de utilizar **TFC** obtenemos que

$$14x^6 - 4(2x)x^2 f(x^2) = 6x^2 \quad \Leftrightarrow \quad 7x^4 - 4xf(x^2) = 3.$$

Por lo tanto, $f(x) = \dfrac{7x^2 - 3}{4\sqrt{x}}$, con $x > 0$.

7.- Si la función $g(t) = 3t^2 + 1$ representa la ganancia de una empresa en el período entre $t = 2000$ y $t = 2010$ en miles de millones, determine el promedio de la ganancia en dicho período y encuentre el tiempo t_c en donde se obtuve esta ganancia promedio.

Utilizando el Teorema del Valor Medio para integrales, sabemos que el promedio de la ganancia $\bar{g}$ en dicho período viene dada por

$$\begin{aligned}\bar{g} &= \frac{1}{2010 - 2000}\int_{2000}^{2010}(3t^2+1)\,dt \\ &= \frac{1}{10}(t^3+t)\Big|_{2000}^{2010} \\ &= \frac{1}{10}((2010)^3 - (2000)^3 + 10) \\ &= 12\,060\,101 \text{ (miles de millones).}\end{aligned}$$

Para calcular el tiempo t_c para el cual se alcanza la ganancia promedio, tenemos que recordar que

$$\bar{g} = \frac{1}{2010 - 2000}\int_{2000}^{2010}(3t^2+1)\,dt = g(t_c) = 3t_c^2 + 1.$$

Por lo tanto,

$$3t_c^2 + 1 = 12\,060\,101 \quad \Leftrightarrow \quad t_c = \sqrt{\frac{12\,060\,100}{3}} \approx 2005.$$

Ejercicios

Para los problemas 1 al 7 derive la función dada.

1. $f(t) = \displaystyle\int_0^{t^2} \sqrt{1+x^3}\,dx.$

2. $g(y) = \displaystyle\int_{4y}^{3y} \operatorname{sen}(z^2)\,dz.$

3. $h(w) = \displaystyle\int_{w-1}^{w^3} \sqrt{1-x^2}\,dx.$

4. $k(x) = \displaystyle\int_{x-1}^{x^2} \operatorname{sen}(\sqrt{y})\,dy.$

5. $l(s) = \displaystyle\int_{\operatorname{sen}(s)}^{\cos(s)} (x^2+1)^3\,dx.$

6. $p(y) = \displaystyle\int_{2y^2}^{y^2+1} s\,ds.$

7. $q(t) = \displaystyle\int_{t^4}^{t^5} \sqrt{1+r^2}\,dr.$

8. Determinar una función continua f para $x > 1$ tal que
$$x^2 = 1 + \int_1^{x^2} \sqrt{1 + f(t)}dt.$$

9. Encontrar una función continua f para $x > 0$ tal que
$$\int_2^{x^2} (1 + \sqrt{t})f(t)\,dt = 3 - 2x - \frac{x^4}{2} - 4\int_{\sqrt{x}}^{1} t(1 + t^2)\,dt$$

10. Sea f la función definida por $f(s) = \displaystyle\int_1^{s^3} \frac{\sqrt{9 + 2u}}{u^2}\,du$. Si $G(y) = \displaystyle\int_0^y f(s)\,ds$, encuentre $G''(2)$.

11. Sea $g(z) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_1^{z^2} \frac{e^{\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}\,dt$. Encuentre $\displaystyle\int_1^2 g'(s)\,ds$.

12. Suponga que f es una función diferenciable en $\mathbb{R}$ y defina F como $F(y) = \displaystyle\int_0^y s^2 f(s)\,ds$. Si $f(1) = 0$ y $f'(1) = 1$, verifique que $F''(1) = 1$.

13. Encontrar una función continua f para $z > 0$ tal que
$$\int_0^{z^3} (2 + \sqrt[3]{t})f(t)\,dt + \frac{3}{8}\int_{2z}^{1} t(4 + t)\,dt = \frac{7}{8}.$$

TEOREMA 2.23 (**Evaluación de integrales**).

1.- **Método de sustitución**. *Si g es una función diferenciable y f es una función continua sobre $[a, b]$, entonces*
$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du = F(u)\Big|_{g(a)}^{g(b)},$$
donde F es una antiderivada de f.

2.- **Método de integración por partes**. *Si f y g son funciones diferenciables en $[a, b]$,*
$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = (f(x)g(x))\Big|_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)\,dx$$

EJEMPLO 2.24. 1.- Evaluar la integral definida
$$I = \int_1^4 \frac{\cos(2 + 3\sqrt{z})}{\sqrt{z}}\,dz.$$

Hagamos la sustitución $u = 2 + 3\sqrt{z}$. Entonces $du = \frac{3}{2\sqrt{z}}\,dz$ o equivalentemente $\frac{2}{3}du = \frac{1}{\sqrt{z}}\,dz$. Además, si $z = 1$, tenemos que $u = 2 + 3\sqrt{1} = 5$, y si $z = 4$ obtenemos que $u = 2 + 3\sqrt{4} = 8$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} I &= \int_1^4 \frac{\cos(2+3\sqrt{z})}{\sqrt{z}}\,dz = \frac{2}{3}\int_5^8 \cos(u)\,du = \frac{2}{3}\operatorname{sen}(u)\Big|_5^8 \\ &= \frac{2}{3}(\operatorname{sen}(8) - \operatorname{sen}(5)). \end{aligned}$$

Con el fin de evitar posibles errores en el proceso de sustitución podemos primero encontrar una antiderivada de la función $\dfrac{\cos(2+3\sqrt{z})}{\sqrt{z}}$, y después proceder a realizar la evaluación utilizando de nuevo el Teorema Fundamental del Cálculo. Más concretamente,

$$\int \frac{\cos(2+3\sqrt{z})}{\sqrt{z}}\,dz = \frac{2}{3}\int \cos(u)\,du = \frac{2}{3}\operatorname{sen}(u) + C = \frac{2}{3}\operatorname{sen}(2+3\sqrt{z}) + C.$$

Por lo tanto,

$$I = \int_1^4 \frac{\cos(2+3\sqrt{z})}{\sqrt{z}}\,dz = \frac{2}{3}(\operatorname{sen}(2+3\sqrt{z})) + C)\Big|_1^4 = \frac{2}{3}(\operatorname{sen}(8) - \operatorname{sen}(5)).$$

2.- Utilice integración por partes para evaluar la integral definida

$$\int_1^e \frac{\ln(t)}{t^{\frac{2}{5}}}\,dt.$$

Como discutimos en los ejemplos, en este caso tomamos $u = \ln(t)$ y $dv = \dfrac{1}{t^{\frac{2}{5}}}$. Entonces, $du = \dfrac{1}{t}$ y $v = \frac{5}{3}t^{\frac{3}{5}}$. Por lo tanto, reemplazando obtenemos que

$$\begin{aligned} \int_1^e \frac{\ln(t)}{t^{\frac{2}{5}}}\,dt &= \frac{5}{3}t^{\frac{3}{5}}\ln(t)\Big|_1^e - \frac{5}{3}\int_1^e t^{\frac{3}{5}}\frac{1}{t}\,dt \\ &= \frac{5}{3}t^{\frac{3}{5}}\ln(t)\Big|_1^e - \left(\frac{5}{3}\right)\left(\frac{5}{3}\right)t^{\frac{3}{5}}\Big|_1^e \\ &= \frac{5}{3}e^{\frac{3}{5}} - \left(\frac{25}{9}\right)(e^{\frac{3}{5}} - 1) \\ &= -\frac{10}{e}^{\frac{3}{5}} + \frac{25}{9}. \end{aligned}$$

Como discutimos en el ejemplo anterior, primero podemos calcular una antiderivada y después proceder a evaluarla. Es decir,

$$\int \frac{\ln(t)}{t^{\frac{2}{5}}}\,dt = \frac{5}{3}t^{\frac{3}{5}}\ln(t) - \frac{5}{3}\int t^{\frac{3}{5}}\frac{1}{t}\,dt = \frac{5}{3}t^{\frac{3}{5}}\ln(t) - \left(\frac{5}{3}\right)\left(\frac{5}{3}\right)t^{\frac{3}{5}}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\int_1^e \frac{\ln(t)}{t^{\frac{2}{5}}}\,dt &= \frac{5}{3}t^{\frac{3}{5}}\ln(t)\Big|_1^e - \left(\frac{5}{3}\right)\left(\frac{5}{3}\right)t^{\frac{3}{5}}\Big|_1^e \\ &= \frac{5}{3}e^{\frac{3}{5}} - \left(\frac{25}{9}\right)(e^{\frac{3}{5}} - 1) \\ &= -\frac{10}{9}e^{\frac{3}{5}} + \frac{25}{9}.\end{aligned}$$

Ejercicios

Aplique el Teorema de evaluación para evaluar las siguientes integrales definidas.

1. $\displaystyle\int_1^3 \frac{5}{h^2}\,dh.$
2. $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{dh}{h^4}.$
3. $\displaystyle\int_1^2 (x^4 - x^3)\,dx.$
4. $\displaystyle\int_1^3 \frac{x^4+1}{x^2}\,dx.$
5. $\displaystyle\int_1^4 \frac{dr}{\sqrt{r}}.$
6. $\displaystyle\int_0^1 u^{99}\,du.$
7. $\displaystyle\int_0^4 (7t^{5/2} - 5t^{3/2})\,dt.$
8. $\displaystyle\int_1^2 (x^2+1)^3\,dx.$
9. $\displaystyle\int_1^3 \frac{10}{(2t+3)^2}\,dt.$
10. $\displaystyle\int_1^9 (1+\sqrt{r})^2\,dr.$
11. $\displaystyle\int_0^4 \sqrt{3r}\,dr.$
12. $\displaystyle\int_2^3 \frac{du}{u^2}.$
13. $\displaystyle\int_1^4 (t^2-2)\sqrt{t}\,dt.$
14. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos 2r\,dr.$
15. $\displaystyle\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2 r \cos r\,dr.$
16. $\displaystyle\int_0^2 \cos \pi y\,dy.$
17. $\displaystyle\int_0^5 \operatorname{sen}\frac{\pi x}{10}\,dx.$
18. $\displaystyle\int_0^{\pi/8} \sec^2 2t\,dt.$
19. $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{(x+1)^3}.$
20. $\displaystyle\int_0^4 y\sqrt{y^2+9}\,dy.$
21. $\displaystyle\int_0^8 y\sqrt{y+1}\,dy.$
22. $\displaystyle\int_0^1 x^3 \operatorname{sen}\pi x^4\,dx.$
23. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} (1+3\operatorname{sen}\theta)^{3/2}\cos\theta\,d\theta.$
24. $\displaystyle\int_0^4 y\sqrt{4-y}\,dy.$
25. $\displaystyle\int_0^{\pi/6} \operatorname{sen} 2y \cos^3 2y\,dy.$

2.4. Aplicaciones de la integral definida

En esta sección vamos a considerar como aplicaciones de la integral definida el cálculo de

1. *Área de regiones planas.*
2. *Volúmenes de sólidos.*
3. *Longitud de arco.*
4. *Área de superficies.*

2.4.1. Área de regiones planas. Como discutimos en la introducción de la integral definida, si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función continua y positiva, entonces el área de la región R limitada por la gráfica de f sobre $[a,b]$, $\mathcal{A}(R)$, viene dada por la integral definida

$$\mathcal{A}(R) = \int_a^b f(t)\,dt,$$

la cual se interpreta de acuerdo con el *Principio de Cavalieri* como "**la suma de la altura** $f(t)$ **tomada con respecto al eje real** t**, desde** $t = a$ **hasta** $t = b$".

En general, si R es una región plana acotada y L es una recta, entonces se define la altura h de R en el punto P con respecto a la recta L como la longitud de la intersección de la región R y la recta L_1 que pasa por P y es perpendicular a L (ver Figura 2.4.1).

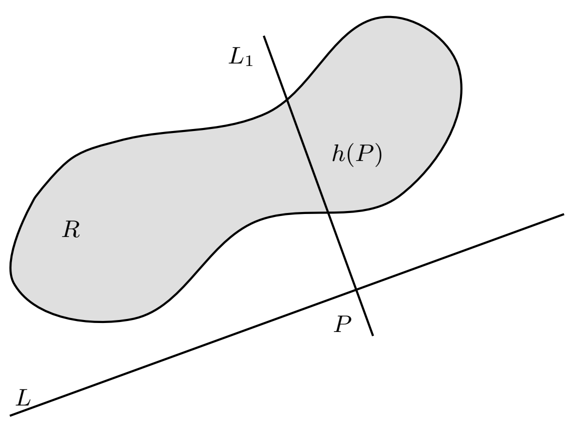


Figura 2.4.1: Función altura.

DEFINICIÓN 2.25 (**Área de regiones planas**). Sean L una recta arbitraria, $\mathcal{O} \in L$ un punto denominado origen de L y R la región plana acotada limitada entre las rectas $t = a$ y $t = b$ sobre L con respecto al origen $\mathcal{O}$. Denotemos con $h(t)$ a la longitud (altura de R) de la intersección de la recta perpendicular a la recta L en el punto $t \in [a, b]$ con la región R (ver Figura 2.4.2).

Definimos el área de la región R con respecto a L como el número real caracterizado por la "suma de alturas" $h(t)$ dado por

$$\mathcal{A}(R) = \int_a^b h(t)\, dt.$$

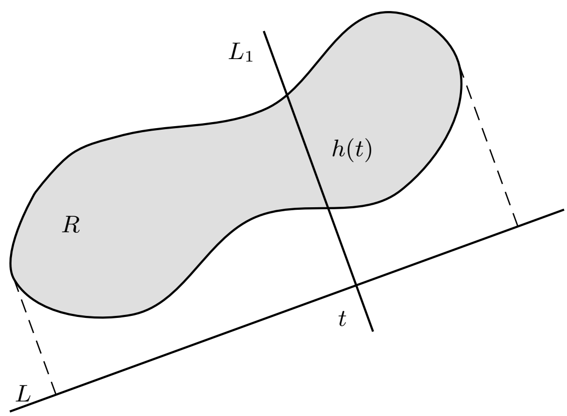


Figura 2.4.2: Región plana acotada.

OBSERVACIÓN 2.26. El área de una región R es independiente de la recta L.

Utilizando esta definición se pueden verificar directamente los siguientes resultados.

TEOREMA 2.27. *1.- Sean $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua y positiva, y R la región limitada por la gráfica de f sobre $[a, b]$ en el eje x, entonces el área de la región R (área bajo la gráfica de f) es*

$$\mathcal{A}(R) = \int_a^b f(x)\, dx,$$

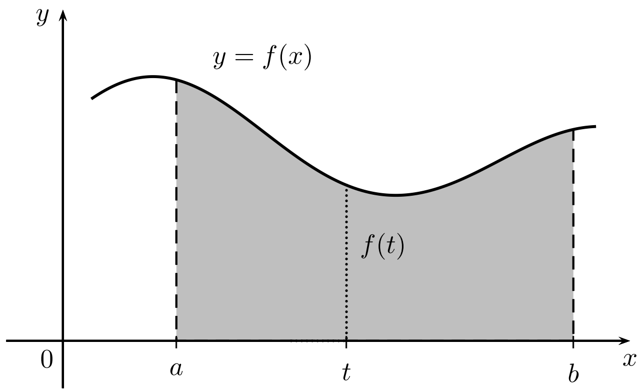


Figura 2.4.3: *Área entre la gráfica de f y el eje x.*

2.- Sean $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función continua (no necesariamente positiva) y R la región limitada por la gráfica de f sobre $[a, b]$ y el eje x, entonces el área de la región R es

$$\mathcal{A}(R) = \int_a^b |f(x)|\, dx.$$

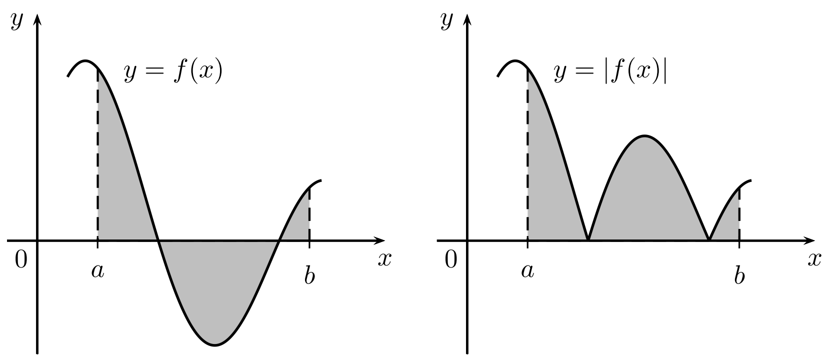


Figura 2.4.4: *Área entre $|f|$ y el eje x.*

3.- Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funciones continuas, y sea R la región limitada por la gráficas de f y g sobre $[a, b]$ en el eje x, entonces el área de la región R (área entre las funciones f y g) es

$$\mathcal{A}(R) = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx.$$

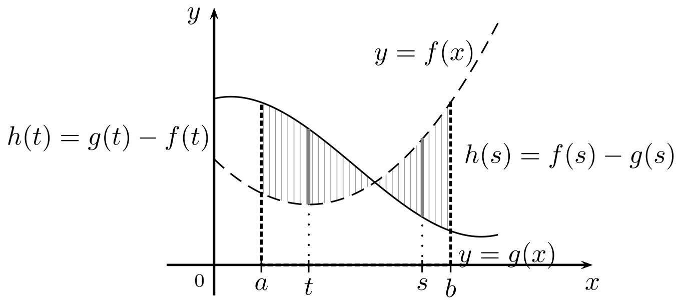


Figura 2.4.5: *Área entre las funciones f y g en $[a, b]$.*

De forma análoga se tiene el siguiente resultado con respecto al eje y.

Teorema 2.28. *1.- Sean $g : [c, d] \to \mathbb{R}$ una función continua y positiva, y R la región limitada por la gráfica de g sobre $[c, d]$, entonces el área de la región R es*

$$\mathcal{A}(R) = \int_c^d g(y)\, dy.$$

2.- Sean $g : [c, d] \to \mathbb{R}$ una función continua (no necesariamente positiva) y R la región limitada por la gráfica de g sobre $[a, b]$ y el eje y, entonces el área de la región R es

$$\mathcal{A}(R) = \int_c^d |g(y)|\, dy.$$

3.- Sean $f, g : [c, d] \to \mathbb{R}$ funciones continuas y sea R la región limitada por la gráficas de f y g sobre $[c, d]$ en el eje y, entonces el área de la región R (área entre las funciones f y g) es

$$\mathcal{A}(R) = \int_c^d |f(y) - g(y)|\, dy.$$

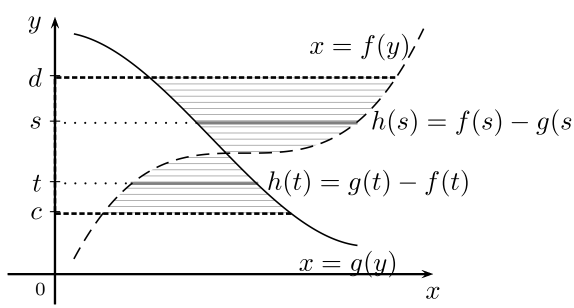


Figura 2.4.6: *Área entre las funciones f y g sobre $[c, d]$.*

Ejemplos 2.29. 1.- Consideremos las funciones

$$f(x) = x^2 \quad \text{y} \quad g = 2x.$$

a) Determine el área $\mathcal{A}(R)$ de la región R del plano limitada por las gráficas de f y g sobre el intervalo $[0, 2]$.

b) Determine el área $\mathcal{A}(R)$ de la región R del plano limitada por las gráficas de f y g sobre el intervalo $[\frac{1}{2}, 3]$.

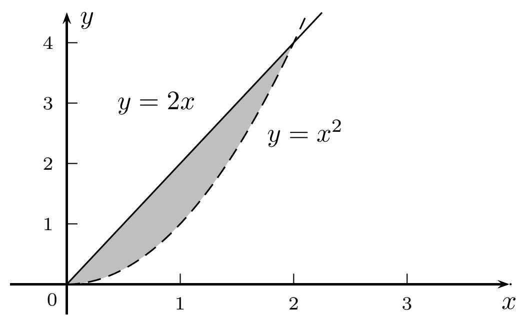


Figura 2.4.7: Graficas de las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = 2x$.

Solución. a) En este caso la función altura es $h(x) = 2x - x^2$ con $x \in [0, 2]$. Por lo tanto, el área $\mathcal{A}(R)$ es

$$\mathcal{A}(R) = \int_0^2 (2x - x^2)\, dx = \left(x^2 - \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^2 = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}.$$

Notemos que el área $\mathcal{A}(R)$ también se pudo haber calculado como una integral con respecto a la variable y. En este caso, R está limitada por las gráficas de las funciones $p(y) = \sqrt{y}$ y $q(y) = \frac{1}{2}y$. Por lo tanto, la función altura es $l(y) = \sqrt{y} - \frac{1}{2}y$. Así que

$$\mathcal{A}(R) = \int_0^4 \left(\sqrt{y} - \frac{1}{2}y\right)\, dy = \left(\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{4}y^2\right)\Big|_0^4 = \frac{16}{3} - 4 = \frac{4}{3}.$$

b) En este caso la función altura es $h(x) = 2x - x^2$ con $x \in [\frac{1}{2}, 2]$ y $h(x) = x^2 - 2x$ con $x \in [2, 3]$. Por lo tanto, el área $\mathcal{A}(R)$ es

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(R) &= \int_{\frac{1}{2}}^2 (2x - x^2)\, dx + \int_2^3 (x^2 - 2x)\, dx \\ &= \left(x^2 - \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_{\frac{1}{2}}^2 + \left(\frac{1}{3}x^3 - x^2\right)\Big|_2^3 = \frac{8}{3} - + \frac{3}{16} = \frac{119}{48}.\end{aligned}$$

Le queda al lector como ejercicio calcular el área $\mathcal{A}(R)$ en términos de la variable y.

2.- Considere las siguientes relaciones entre las variables x e y (ver Figura 2.4.8):

$$y = (x-2)^2 \qquad \text{y} \qquad x = y^2.$$

Determine el área $\mathcal{A}(R)$ de la región R del plano en el primer cuadrante limitada por la gráficas dadas cuando:

a) $1 \leq x \leq 3$, b) $0 \leq x \leq 3$, c) $0 \leq y \leq 3/2$.

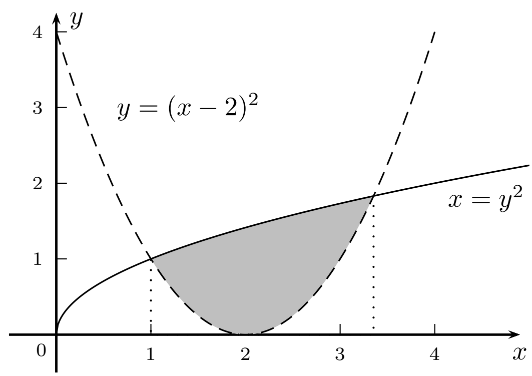


Figura 2.4.8: Gráficas de $y = (x-2)^2$ y $x = y^2$ sobre $[0, 5]$.

Solución. Primero observemos las gráficas de $f(x) = (x-2)^2$ y $g(x) = \sqrt{x}$ sobre $[0, 5]$. Notemos que las gráficas de las funciones f y g se intersecan en $x = 1$ e $y = 1$. Además, el segundo punto de intersección se tiene para $3 < x < 4$ y para $1 < y < 2$.

a) Si R es la región del plano en el primer cuadrante limitada sobre $1 \leq x \leq 3$, entonces la función altura viene dada por $h(t) = \sqrt{t} - (t-2)^2$. En consecuencia, el área de R es

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(R) &= \int_1^3 h(t)\,dt = \int_1^3 (\sqrt{t} - (t-2)^2)\,dt \\ &= \left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}(t-2)^3\right]_1^3 = 2\sqrt{3} - \frac{4}{3}.\end{aligned}$$

b) Si R es la región del plano en el primer cuadrante limitada sobre $0 \leq x \leq 3$, entonces la función altura viene dada por $h(t) = (t-2)^2 - \sqrt[2]{t}$ para $0 \leq t \leq 1$ y por

$h(t) = \sqrt{t} - (t-2)^2$ para $1 \leq t \leq 3$. En consecuencia, el área de R es

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(R) &= \int_0^1 ((t-2)^2 - \sqrt{t})\, dt + \int_1^3 (\sqrt{t} - (t-2)^2)\, dt \\ &= \left[\frac{1}{3}(t-2)^3 - \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 + \left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}(t-2)^3\right]_1^3 \\ &= \frac{5}{3} + 2\sqrt{3} - \frac{4}{3} = 2\sqrt{3} + \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

c) Si R es la región del plano en el primer cuadrante limitada sobre $0 \leq y \leq 3/2$. En este caso tenemos que reescribir las funciones en términos de la variable y.

Para $0 \leq y \leq 1$, la parábola $y = (x-2)^2$ se debe describir como

$$g_1(y) = 2 + \sqrt{y}, \quad g_2(y) = 2 - \sqrt{y}.$$

En este caso, la función altura viene dada por $h(t) = g_1(y) - g_2(y) = 2\sqrt{y}$. Ahora, para $1 \leq y \leq 3/2$, la función altura en términos del eje y viene dada por $h(y) = 2 + \sqrt{y} - y^2$. En consecuencia, el área de R es

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(R) &= \int_0^1 2\sqrt{y}\, dy + \int_1^{\frac{3}{2}} (2 + \sqrt{y} - y^2)\, dy = \left[\frac{4}{3}y^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 + \left[2y + \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}y^3\right]_1^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{4}{3} + 3 + \frac{2}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{9}{8} - \left(2 + \frac{1}{3}\right) = \frac{7}{8} + \frac{2}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{3}{2}}.\end{aligned}$$

Ejercicios

I.- Determine el área de las regiones descritas en los siguientes problemas.

1. La región S acotada por debajo por la gráfica $y = x^3$ y por arriba por la gráfica $y = x$ en el intervalo $[0, 1]$.
2. La región S entre la gráfica $y = (x+1)^2$ y el eje x en el intervalo $[1, 3]$.
3. La región S acotada por arriba por la gráfica $y = x^3$ y por abajo por la gráfica $y = x^4$ en el intervalo $[0, 1]$.
4. La región S acotada por arriba por la gráfica $y = x^2$ y por abajo por la recta horizontal $y = -1$ en el intervalo $[-1, 2]$.
5. La región R acotada por arriba por la gráfica $y = 1/(x+1)^3$ y por abajo por el eje x en el intervalo $[0, 2]$.
6. La región R acotada por arriba por la gráfica $y = 4x - x^2$ y por abajo por el eje x.
7. La región R acotada por la izquierda por la gráfica de $x = y^2$ y por la derecha por la recta vertical $x = 4$.

8. La región R entre las gráficas de $y = x^4 - 4$ y $y = 3x^2$.

II.- En los siguientes problemas, esquematice las regiones acotadas por las curvas dadas; determine después su área.

1. $y = x^2$, $y = 4$.
2. $x = 0$, $x = 16 - y^2$.
3. $x = y^2$, $x = 32 - y^2$.
4. $y = x^2$, $x = y^2$.
5. $y = 2x^2$, $y = 5x - 3$.
6. $y = x^2$, $y = 3 + 5x - x^2$.
7. $y = x^2$, $y = 4(x-1)^2$.
8. $y = x^4$, $y = 32 - x^4$.
9. $y = x^3$, $y = 2x - x^2$.
10. $y^2 = x$, $y^2 = 2(x-3)$.
11. $y = x^3$, $x + y = 0$, $y = x + 6$.

2.4.2. Volúmenes. Consideremos un sólido acotado $S \subset \mathbb{R}^3$ y tomemos una recta $L \subset \mathbb{R}^3$ con vector director $\vec{\eta}$. Para cada punto P sobre L definimos $A(P)$ como el área de la región plana $R(P)$ formada como la sección transversal perpendicular a L en el punto P. Esto es, $R(P)$ es la intersección del sólido S con el plano $\Pi(P)$ que pasa por el punto P y tiene vector normal $\vec{\eta}$ (ver Figura 2.4.9).

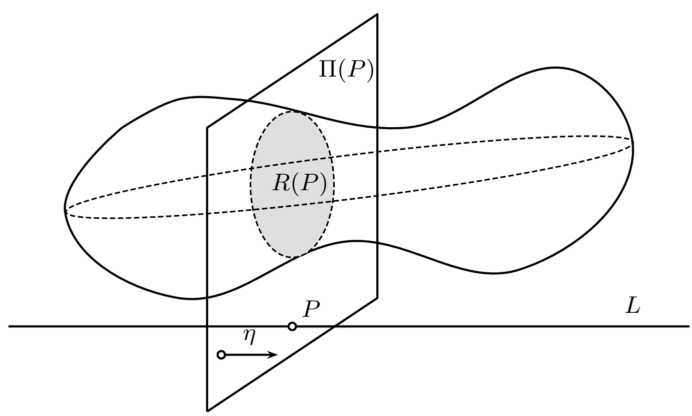


Figura 2.4.9: Secciones transversales perpendiculares.

Utilizando una vez más el Principio de Cavalieri, podemos definir el volumen del sólido S, denotado con $\mathcal{V}(S)$ como "la suma de las áreas de las secciones transversales perpendiculares a la recta L". Más concretamente, tenemos la siguiente definición.

Definición 2.30 (**Volúmenes de sólidos acotados**). Sean L una recta arbitraria, $\mathcal{O} \in L$ un punto denominado origen de L y $S \subset \mathbb{R}^3$ un sólido acotado. Si S está limitado entre $t = a$ y $t = b$ sobre L con respecto al origen $\mathcal{O}$ y si $A(t)$ es el área de la sección transversal perpendicular a la recta L en $t \in [a, b]$ (intersección del sólido S con el plano Π_t que es perpendicular a la recta L en el punto t, ver Figura 2.4.10), entonces definimos el volumen del sólido S con respecto a L como el número real caracterizado por

$$\mathcal{V}(S) = \int_a^b A(t)\, dt.$$

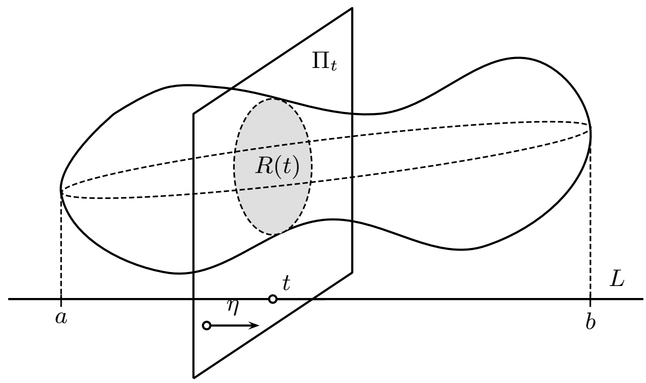


Figura 2.4.10: Secciones transversales perpendiculares.

Observación 2.31. El volumen de un sólido acotado S es independiente de la recta L.

Ejemplos 2.32. 1.- **Volumen de un cilindro**. Vamos a mostrar que el volumen de un cilindro circular de radio r y altura h es $\mathcal{V}(C) = \pi r^2 h$. Sea L el eje perpendicular a la base del cilindro que pasa por el centro del círculo. Si $0 \le t \le h$, entonces el área $A(t)$ de la sección perpendicular a L de altura t es

$$A(t) = \pi r^2 \qquad \text{(independiente de } t\text{)}.$$

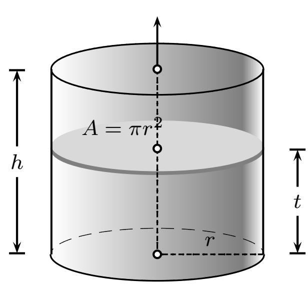


Figura 2.4.11: Cilindro de radio r y altura h.

Es decir $A(t) = \pi r^2$ es constante con respecto a t. Por lo tanto,

$$\mathcal{V}(C) = \int_0^h A(t)\,dt = \pi r^2 \int_0^h dt = \pi r^2 h.$$

2.- **Volumen de un cono circular recto de radio** r **y altura** h. Vamos a establecer que el volumen de un cono circular recto de radio r y altura h es $\mathcal{V}(C) = \frac{1}{3}\pi r^2 h$. Sea L el eje perpendicular a la base del cono que pasa por el centro del círculo. Si $0 \leq t \leq h$, entonces el área $A(t)$ de la sección perpendicular a L de altura t es

$$A(t) = \pi s^2 \quad (\text{ donde } s \text{ depende } t.)$$

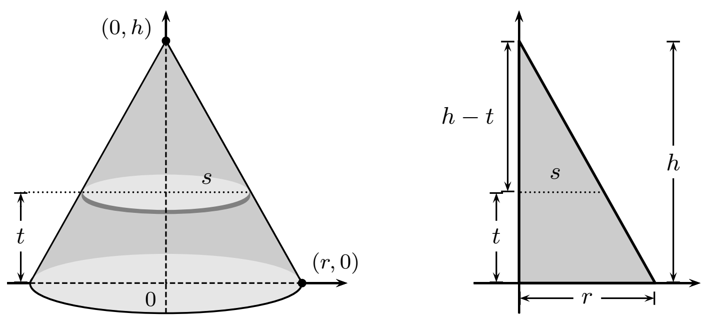


Figura 2.4.12: Cono circular recto de radio r y altura h.

Pero utilizando semejanza de triángulos concluimos que

$$\frac{h}{r} = \frac{h-t}{s} \quad \Longleftrightarrow \quad s = \frac{r}{h}(h-t).$$

Por lo tanto,

$$A(t) = \pi s^2 = \pi \frac{r^2}{h^2}(h-t)^2.$$

De donde, el volumen de un cono circular recto de radio r y altura h es

$$\mathcal{V}(C) = \int_0^h A(t)\,dt = \pi \frac{r^2}{h^2} \int_0^h (h-t)^2\,dt = -\pi \frac{r^2}{h^2}\frac{1}{3}(h-t)^3\Big|_0^h = \frac{\pi r^2 h}{3}.$$

3.- **Volumen de una esfera**. Como hemos aprendido, el volumen de una esfera S de radio r es $\mathcal{V}(S) = \frac{4}{3}\pi r^3$. Sea L el eje perpendicular a la base de la esfera que pasa por el centro del círculo. Si $0 \leq t \leq r$, entonces el área $A(t)$ de la sección perpendicular a L de altura t es

$A(t) = \pi s^2$ (donde s depende de t).

Pero del Teorema de Pitágoras se puede ver que

$$s = \sqrt{r^2 - t^2}.$$

Por lo tanto, el volumen de la esfera es la "suma de áreas" desde $-r$ hasta r. Más concretamente,

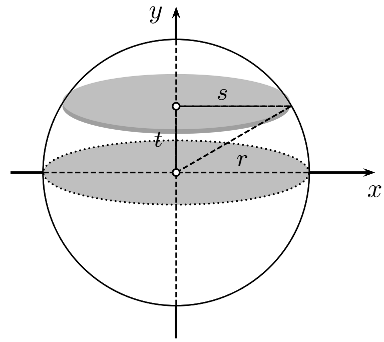


Figura 2.4.13: Esfera de radio r.

$$\begin{aligned}\mathcal{V}(S) &= \int_{-r}^{r} A(t)\,dt = \int_{-r}^{r} \pi s^2\,dt \\ &= \pi \int_{-r}^{r} (r^2 - t^2)\,dt = \pi \left[r^2 t - \frac{1}{3} t^3 \right]_{-r}^{r} \\ &= \frac{4}{3}\pi r^3.\end{aligned}$$

2.4.2.1. **Sólidos de revolución – Secciones transversales perpendiculares.** Estamos interesados en calcular el volumen de algunos sólidos generados al rotar una región del plano alrededor de una recta. Los siguientes son algunos ejemplos típicos de tales sólidos.

Ejemplos 2.33.

1.- **Cilindro circular recto de radio r y altura h.**

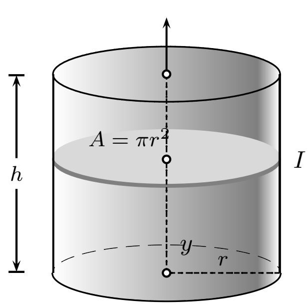


Figura 2.4.14: Cilindro generado al rotar I alrededor del eje y.

2.- **Cono circular recto**.

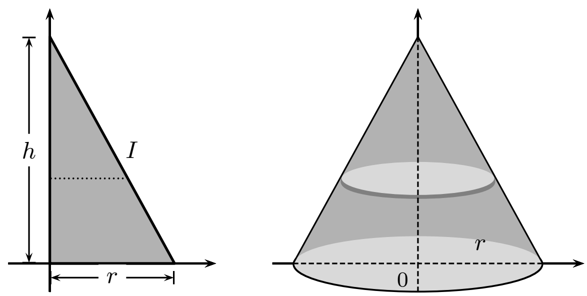


Figura 2.4.15: Cono generado al rotar un segmento oblicuo I alrededor del eje y.

3.- **Esfera de radio** r.

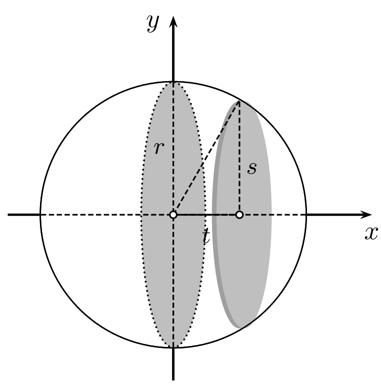


Figura 2.4.16: Esfera generada al rotar $x^2 + y^2 = r^2$ $(y \geq 0)$ con respecto al x.

4.- **Elipsoide**.

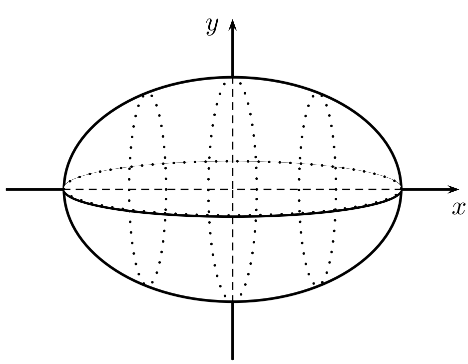


Figura 2.4.17: Elipsoide generado al rotar $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $(y \geq 0)$ con respecto al eje x.

5.- **Paraboloide**.

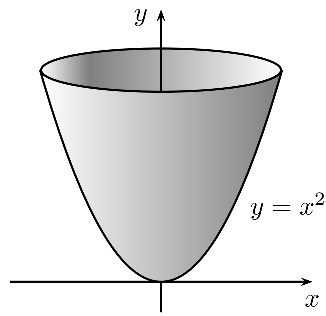


Figura 2.4.18: Paraboloide generado al rotar $y = x^2$ alrededor del eje y.

Definición 2.34 (**Sólido de revolución**). Sean $R \subset \mathbb{R}^2$ una región plana (limitada entre dos a más curvas planas) y $L \subset \mathbb{R}^2$ una recta tal que no cruce a R. Al sólido $S \subset \mathbb{R}^3$ generado al rotar la región R alrededor de la recta L se le denomina sólido de revolución (ver Figura 2.4.19). Si la región R está limitada por una curva C y la recta L, llamaremos a la curva C generatriz del sólido S.

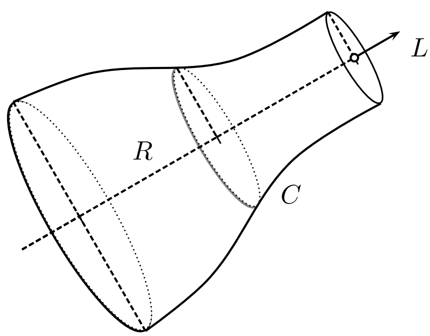


Figura 2.4.19: Superficie de revolución de C con respecto a L.

Definición 2.35 (**Sección transversal perpendicular**). Sea S el sólido de revolución con curva generatriz C con respecto a la recta L. Sea P un punto sobre L y denotemos con $l(P)$ a la distancia entre la recta L y la curva C (ver Figura 2.4.20). Entonces, la sección transversal de S perpendicular a la recta L es un círculo de radio $l(P)$, y por lo tanto, el área de dicha sección transversal perpendicular a L en el punto P es

$$A(P) = \pi(l(P))^2.$$

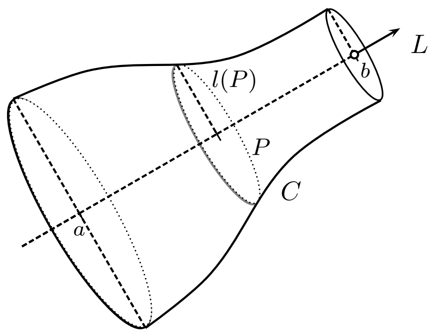


Figura 2.4.20: Superficie de revolución de C con respecto a L en $[a, b]$.

Del *Principio de Cavalieri*, si $\mathcal{O} \in L$ es el origen y si S está limitado entre $t = a$ y $t = b$ con respecto al origen $\mathcal{O}$, entonces el volumen del sólido de revolución S viene dado por

$$\mathcal{V}(S) = \int_a^b \pi[l(t)]^2\, dt,$$

donde $l(t)$ es la distancia entre L y C en el punto $t \in [a, b]$. En particular tenemos:

Teorema 2.36. *1. Sean $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua no negativa y S el sólido de revolución generado al rotar la región bajo la gráfica de f sobre el intervalo $[a, b]$. Entonces el volumen de S es*

$$\mathcal{V}(S) = \int_a^b \pi[f(x)]^2\, dx.$$

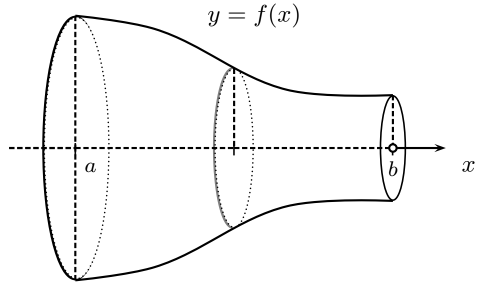


Figura 2.4.21: *Superficie de revolución generada por $y = f(x)$ al girar alrededor del eje x.*

2. Sean $g : [c,d] \to \mathbb{R}$ una función continua no negativa y S el sólido de revolución generado al rotar la región bajo gráfica de g sobre el intervalo $[c,d]$. Entonces el volumen de S es

$$\mathcal{V}(S) = \int_c^d \pi[g(y)]^2\, dy.$$

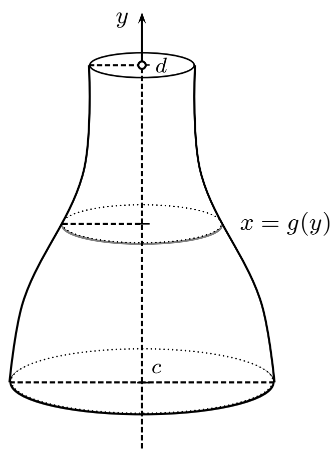


Figura 2.4.22: Superficie de revolución generada por $x = g(y)$ al girar alrededor del eje y.

Ejemplos 2.37. Calcule el volumen del sólido de revolución S en los siguientes casos:

1.- Sea S el sólido de revolución obtenido al rotar alrededor del eje x la región R que se encuentra bajo la gráfica de $y = x^2$, entre las rectas $x = 1$ y $x = 2$.

2.- Sea S el sólido de revolución obtenido al rotar alrededor del eje y la región R que se encuentra bajo la gráfica de $y = x^2$, entre las rectas $y = 1$ e $y = 4$.

3.- Sea S el sólido de revolución obtenido al rotar alrededor del eje $y = -1$ la región R que se encuentra bajo la gráfica de $y = x^2$, entre las rectas $x = 1$ y $x = 2$.

4.- Sea S el sólido de revolución obtenido al rotar alrededor del eje $x = 4$ la región R que se encuentra bajo la gráfica de $y = x^2$, entre las rectas $y = 1$ e $y = 4$.

1.- Rotación con respecto al eje x. Primero observemos que la región R y el sólido S que se genera cuando R se gira en torno al eje x tienen la siguiente forma:

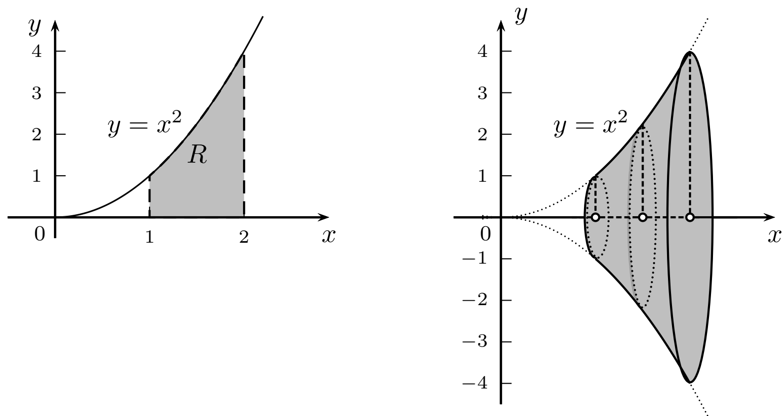


Figura 2.4.23: Sólido de revolución generado por la región R al girar alrededor del eje x.

Utilizando el método de secciones transversales perpendiculares o discos, sabemos que el volumen del sólido resultante se calcula mediante la fórmula

$$\mathcal{V}(S) = \pi \int_1^2 [f(x)]^2 dx$$

donde $f(x)$ mide el radio de la sección transversal sobre el eje x. En consecuencia,

$$\mathcal{V}(S) = \pi \int_1^2 [x^2]^2 dx = \pi \int_1^2 x^4 dx = \frac{\pi}{5} x^5 \Big|_1^2 = \frac{\pi}{5}(2^5 - 1^5) = \frac{31\pi}{5}.$$

2.- Rotación con respecto al eje y. En primer lugar

$$y = x^2 \quad \Leftrightarrow \quad x = \sqrt{y},\ y \geq 0.$$

En este caso la región R y el sólido S que se genera cuando R se gira en torno al eje y tienen la siguiente forma:

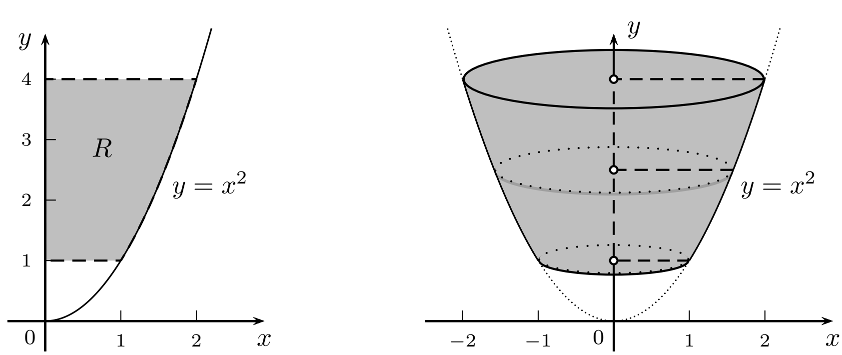


Figura 2.4.24: Sólido de revolución generado por la región R al girar alrededor del eje y.

Utilizando de nuevo secciones transversales perpendiculares o discos, sabemos que el volumen del sólido resultante se calcula mediante la fórmula

$$\mathcal{V}(S) = \pi \int_1^4 [g(y)]^2 dy,$$

donde $g(y)$ mide el radio de la sección transversal sobre el eje y. En consecuencia,

$$\begin{aligned}\mathcal{V}(S) &= \pi \int_1^4 [\sqrt{y}]^2 dy = \pi \int_1^4 y dy \\ &= \frac{\pi}{2} y^2 \Big|_1^4 = \frac{\pi}{2}(4^2 - 1^2) = \frac{15\pi}{2}.\end{aligned}$$

3.- Rotación con respecto al eje $y = -1$. Observemos que la región R y el sólido S que se genera cuando R se gira en torno al eje $y = -1$ tienen la siguiente forma:

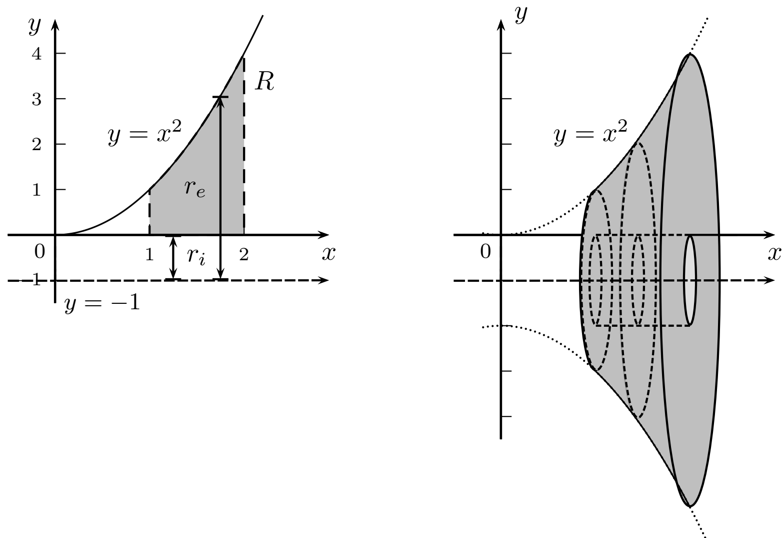


Figura 2.4.25: Sólido de revolución generado por la región R al girar alrededor de la recta $y = -1$.

Note que en este caso tenemos dos radios de rotación con respecto al eje $y = -1$ paralelo al eje x, el radio exterior r_e y el radio interior r_i, los cuales pueden ser interpretados como el radio de rotación más alejado y el radio de rotación más cercano al eje de rotación $y = -1$ respectivamente. Estos radios viene caracterizados como

$$r_e = 1 + x^2 \quad \text{y} \quad r_i = 1.$$

Por lo tanto, el volumen del sólido debe ser la diferencia entre el volumen exterior y el volumen interior. Es decir,

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}(S) &= \int_1^2 \pi(r_e)^2\,dx - \int_1^2 \pi(r_i)^2\,dx \\
&= \pi\int_1^2 ((1+x^2)^2-(1)^2)dx \\
&= \pi\int_1^2 (2x^2+x^4)dx \\
&= \pi\left(\frac{2}{3}x^3+\frac{x^5}{5}\right)\Big|_1^2 \\
&= \pi\left[\frac{2}{3}(2)^3+\frac{(2)^5}{5}-\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{5}\right)\right] = \pi\left(\frac{14}{3}+\frac{31}{5}\right) = \frac{163\pi}{15}.
\end{aligned}$$

4.- Rotación con respecto al eje $x = 4$. Observemos que la región R y el sólido S que se genera cuando R se gira en torno al eje $x = 4$ tienen la siguiente forma:

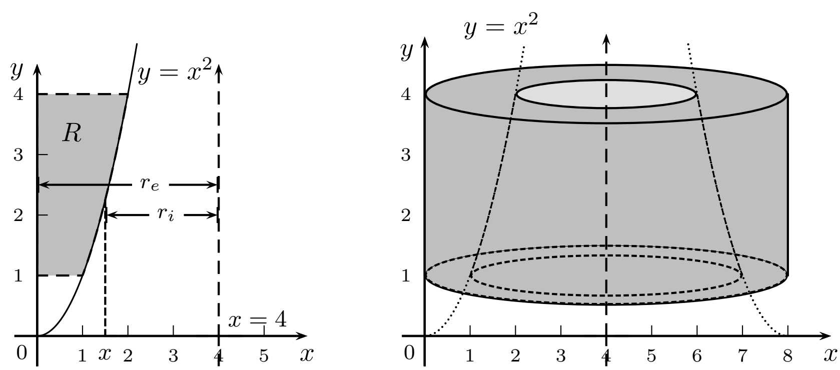


Figura 2.4.26: Sólido de revolución generado por la región R al girar alrededor de la recta $x = 4$.

Note que como en el caso anterior tenemos dos radios de rotación con respecto al eje $x = 4$ paralelo al eje y, el radio exterior r_e y el radio interior r_i, los cuales pueden ser interpretados como el radio de rotación más alejado y el radio de rotación más cercano al eje de rotación $x = 4$, respectivamente. Estos radios viene caracterizados como

$$r_e = 4 \quad \text{y} \quad r_i = 4 - \sqrt{y}.$$

Por lo tanto, el volumen del sólido debe ser la diferencia entre el volumen exterior y el volumen interior. Es decir,

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}(S) &= \int_1^4 \pi (r_e)^2\, dy - \int_1^4 \pi (r_i)^2\, dy \\
&= \pi \int_1^4 (4^2 - (4-\sqrt{y})^2) dy = \pi \int_1^4 (8\sqrt{y} - y) dy \\
&= \pi \left(\frac{16}{3} y^{3/2} - \frac{1}{2} y^2 \right) \Big|_1^4 = \pi \left[\frac{16}{3}(4^{3/2} - 1) - \frac{1}{2}(4^2 - 1) \right] = \frac{179\pi}{6}.
\end{aligned}$$

Observación 2.38. Observemos que las ideas utilizadas en las rotaciones con respecto a ejes paralelos de los ejes coordenados, se pueden extender cuando se desea calcular el volumen de un sólido de revolución generado por una región plana que se encuentra entre dos curvas. Más concretamente.

Teorema 2.39. *1. Sea $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ funciones continuas tales que $f(x) \geq g(x)$ para todo $x \in [a,b]$. Sea S el sólido de revolución generado al rotar la región limitada por las gráfica de f y g sobre el eje x entre $x = a$ y $x = b$. Entonces el volumen de S es*

$$\mathcal{V}(S) = \int_a^b \pi \left([f(x)]^2 - [g(x)]^2 \right)\, dx.$$

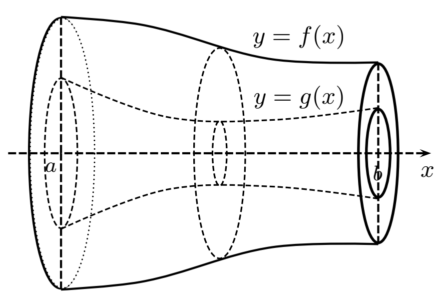


Figura 2.4.27: *Sólido de revolución generado al girar alrededor del eje x.*

2. Sean $f, g : [c,d] \to \mathbb{R}$ funciones continuas tales que $f(y) \geq g(y)$ para todo $y \in [c,d]$. Sea S el sólido de revolución generado al rotar la región limitada por las gráfica de f y g sobre el eje y entre $y = c$ e $y = d$. Entonces el volumen de S es

$$\mathcal{V}(S) = \int_c^d \pi \left([f(y)]^2 - [g(y)]^2 \right)\, dy.$$

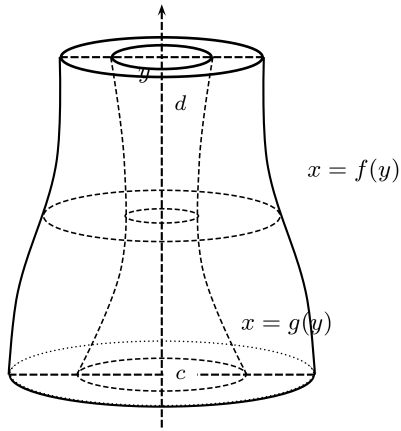


Figura 2.4.28: Sólido de revolución generado al girar alrededor del eje y.

Ejercicios

En los siguientes problemas utilice el método de secciones transversales perpendiculares para determinar el volumen del sólido generado, al girar en torno del eje indicado la región plana acotada por las curvas dadas.

1. $y = x^2$, $y = 0$, $x = 1$; el eje x.

2. $y = x^2$, $y = 4$, $x = 0$ (sólo el primer cuadrante); el eje y.

3. $y = \operatorname{sen} x$ en $[0, \pi]$, $y = 0$; el eje x.

4. $y = x^2$, $x = y^2$; el eje x.

5. $y = x^2$, $y = 8 - x^2$; el eje x.

6. $y = 1 - x^2$, $y = 0$; el eje x.

7. $y = 1 - x^2$, $y = 0$; la recta horizontal $y = -1$.

8. $y = 6 - x^2$, $y = 2$; el eje y.

9. $y = x - x^3$, $y = 0$ $(0 \leq x \leq 1)$; la recta horizontal $y = -1$.

10. $y = 4$, $x = 0$, $y = x^2$; el eje y.

11. $y = x^2$, $x = y^2$; la recta horizontal $y = -2$.

12. $y = x^2$, $x = y^2$; la recta vertical $x = 3$.

13. Considere la región S que está acotada por las parábolas $y^2 = x$ e $y^2 = 2(x-3)$. Determine el volumen del sólido generado al girar S en torno del eje x.

2.4.2.2. **Volumen para sólidos de revolución – Capas cilíndricas.** En esta sección nos limitaremos al cálculo de volúmenes para sólidos de revolución obtenidos al rotar la región limitada por la gráfica de función con respecto a los ejes coordenados, o ejes paralelos a éstos.

DEFINICIÓN 2.40 (**Capa cilíndrica**). Llamaremos capa cilíndrica de altura h al conjunto limitado por dos cilindros concéntricos de altura h.

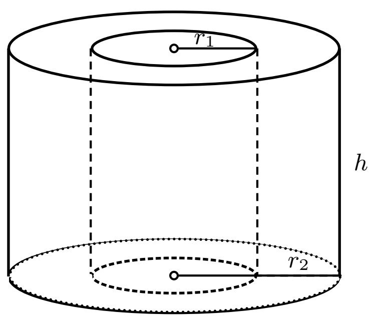


Figura 2.4.29: Capa cilíndrica de radios r_1 y r_2 y altura h.

De acuerdo con la discusión, si C_1 y C_2 denotan cilindros concéntricos de altura h y radios r_1 y r_2 respectivamente $(r_2 > r_1)$, entonces el volumen de la capa cilíndrica K generada por K_1 y K_2 es

$$\begin{aligned} V(K) = V(K_1) - V(K_2) &= \pi r_2^2 h - \pi r_1^2 h \\ &= \pi(r_2 - r_1)(r_1 + r_2)\,()\,h \\ &= 2\pi\left(\frac{r_1 + r_2}{2}\right)(r_2 - r_1)h \\ &= 2\pi\bar{r}\Delta r h, \end{aligned}$$

donde $\bar{r} = \frac{r_1+r_2}{2}$ y $\Delta r = r_2 - r_1$. En otras palabras,

$$V(K) \equiv 2\pi \cdot (\text{promedio radios}) \cdot (\text{incremento en } r) \cdot (\text{altura}).$$

Nosotros vamos a utilizar capas cilíndricas con el fin de aproximar adecuadamente el volumen de un sólido de revolución obtenido al rotar con respecto al eje y la región bajo la gráfica de una función continua. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua con $a > 0$. Tomemos una partición arbitraria de $[a, b]$, digamos

$$x_0 = a < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Sobre cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ construimos un rectángulo R_i de altura $h_i = f(\bar{x}_i)$, donde $\bar{x}_i \in [x_{i-1}, x_i]$ es el punto medio entre x_i y x_{i-1} definido como $\bar{x}_i = \dfrac{x_i + x_{i-1}}{2}$.

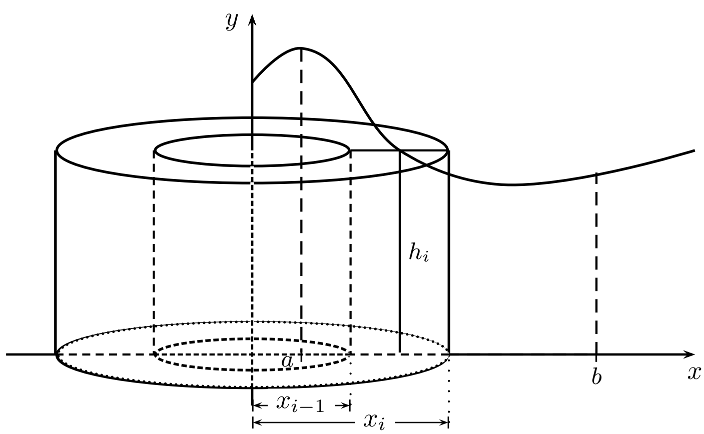


Figura 2.4.30: Capa cilíndrica entre x_{i-1} y x_i con altura h_i.

Al girar el rectángulo i-ésimo R_i alrededor del eje y, obtenemos una capa cilíndrica K_i de altura $h_i = f(\bar{x}_i)$ cuyo volumen es

$$\begin{aligned} V(K_i) &\equiv 2\pi \cdot (\text{promedio radios}) \cdot (\text{altura}) \cdot (\text{incremento en } r) \\ &= 2\pi\, \bar{x}_i\, f(\bar{x}_i)\, \Delta x_i. \end{aligned}$$

Por lo tanto, concluimos que el volumen del sólido S generado al rotar alrededor del eje y la región bajo la gráfica de f se puede aproximar como

$$\begin{aligned} V(S) &\cong V(K_1) + V(K_2) + \cdots + V(K_n) \\ &\cong \sum_{i=1}^{n} V(K_i) = \sum_{i=1}^{n} 2\pi \bar{x}_i \Delta_i x f(\bar{x}_i). \end{aligned}$$

El análisis anterior se puede resumir en el siguiente resultado.

TEOREMA 2.41. *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua con $a > 0$. Si S es el sólido de revolución obtenido al rotar la región bajo la gráfica de la función f sobre $[a,b]$ con respecto al eje y, entonces el volumen de S viene dado por*

$$\mathcal{V}(S) = \int_a^b 2\pi x f(x)\,dx.$$

OBSERVACIÓN 2.42. En la fórmula anterior x se debe interpretar como la distancia al eje de rotación y $f(x)$ como la altura.

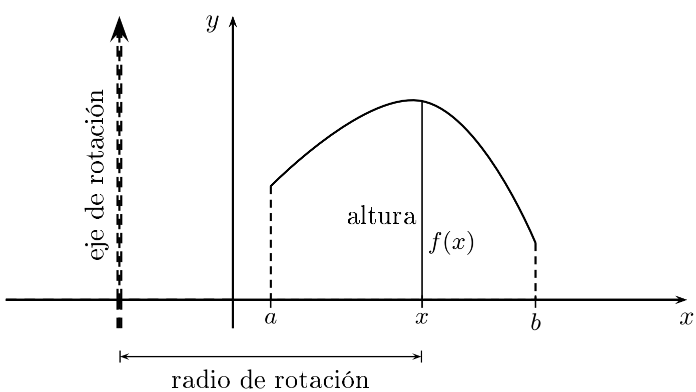


Figura 2.4.31: Eje y radio de rotación.

De forma análoga se tiene el siguiente resultado.

TEOREMA 2.43. *Sea $g : [c,d] \to \mathbb{R}$ una función continua con $c > 0$. Si S es el sólido de revolución obtenido al rotar con respecto al eje x la región bajo la gráfica de la función g sobre $[c,d]$, entonces el volumen de S viene dado por*

$$\mathcal{V}(S) = \int_c^d 2\pi y g(y)\,dy.$$

EJEMPLOS 2.44. Calcule el volumen del sólido de revolución S en los siguientes casos:

1.- Sea S el sólido de revolución obtenido al rotar alrededor del eje y la región R que se encuentra bajo la gráfica de $y = x^2$, entre las rectas $x = 1$ y $x = 2$.

2.- Sea S el sólido de revolución obtenido al rotar alrededor del eje $x = 3$ paralelo al eje y la región R que se encuentra bajo la gráfica de $y = x^2$, entre las rectas $x = 1$ y $x = 2$.

1.- Rotación con respecto al eje y. Primero observemos que la región R y el sólido S que se genera cuando R se gira en torno al eje x tienen la siguiente forma:

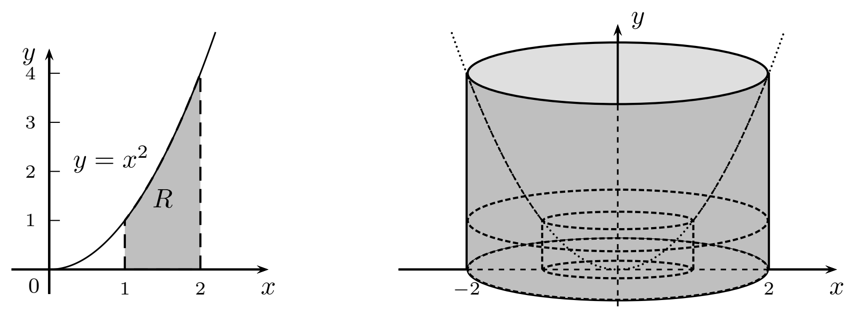


Figura 2.4.32: Sólido de revolución generado por la región R al girar alrededor del eje y.

Utilizando el método de cascarones o capa cilíndricas, sabemos que el volumen del sólido resultante se calcula mediante la fórmula

$$\mathcal{V}(S) = \int_1^2 2\pi x f(x) dx$$

donde $f(x)$ mide la altura del rectángulo R sobre el eje x y x representa el radio medio desde x hasta el eje de rotación. En consecuencia,

$$\mathcal{V}(S) = \int_1^2 2\pi x x^2\, dx = \frac{2\pi}{4} x^4 \Big|_1^2 = \frac{2\pi}{4}(16 - 1) = \frac{15\pi}{2}.$$

Observación 2.45. Notemos que este volumen también se puede calcular utilizando secciones transversales perpendiculares con respecto al eje y. En este caso, al ver la gráfica se debe tener en cuenta que es necesario descomponer tanto la función (en términos de y) como la región en dos subregiones

$$R_1 = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1,\, 0 \leq y \leq 1\} \text{ y } R_2 = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1,\, 1 \leq y \leq 4\}.$$

Sobre la subregión R_1, las funciones son $x = 1$ y $x = 2$, y sobre la subregión R_2, las funciones son $g_1(y) = \sqrt{y}$ y $g_2(y) = 4$. En consecuencia el volumen viene dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(S) &= \int_0^1 \pi \left[2^2 - 1^2\right] dy + \int_1^2 \pi \left[2^2 - \sqrt{y}^2\right] dy \\ &= 3\pi + \pi \left[4 - \frac{1}{2} y^2\right]_1^4 = 3\pi + \frac{9\pi}{2} = \frac{15\pi}{2}. \end{aligned}$$

En este caso, el cálculo parece ser un poco más complejo.

2.- Rotación con respecto al eje $x = 3$. Note que es necesario apoyarse en la gráfica de la región R con el fin de escoger el método apropiado para realizar el cálculo del volumen.

Sea S el sólido generado al rotar $y = x^2$ entre $x = 1$ y $x = 2$ alrededor del eje $x = 3$.

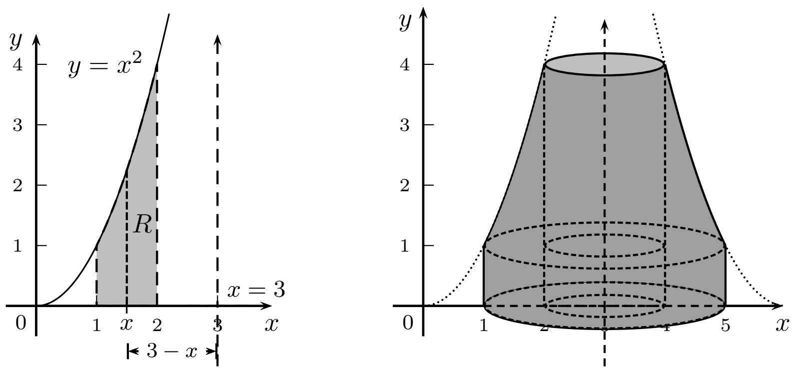


Figura 2.4.33: Sólido de revolución generado por la región R al girar alrededor de la recta $x = 3$.

Al utilizar el método de capas o cascarones cilíndricos es necesario recordar que el radio medio es la distancia desde el x correspondiente hasta el eje de rotación, en este caso la recta $x = 3$. Por lo tanto, el radio medio es $3 - x$ y la altura del rectángulo R sigue siendo $y = x^2$. El volumen del sólido será entonces:

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}(S) &= 2\pi \int_1^2 (3 - x)(x^2)dx \\
&= 2\pi \int_1^2 (3x^2 - x^3)dx \\
&= 2\pi \left(x^3 - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_1^2 \\
&= 2\pi \left(\left(2^3 - \frac{2^4}{4} \right) - \left(1 - \frac{1}{4} \right) \right) \\
&= 2\pi \left(4 - \frac{3}{4} \right) = \frac{13\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Ejemplos 2.46. Vamos a presentar unos ejemplos combinados de cálculo de volúmenes de sólidos de revolución. Consideremos la región R acotada por las gráficas de $y = x^2$ e $y = x$.

Con el fin de definir los límites de integración vamos a encontrar los puntos de intersección de las curvas (ver Figura 2.4.34(a)). Para ello resolvemos la ecuación $x = x^2$. Es decir,

$$x = x^2 \quad \Leftrightarrow \quad x - x^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x(1-x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \quad \text{o} \quad x = 1.$$

En consecuencia, los puntos de corte se dan en $(0,0)$ y $(1,1)$.

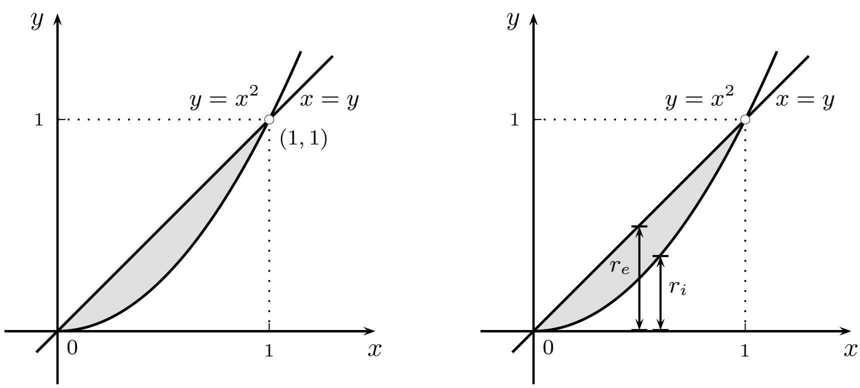


Figura 2.4.34: (a) Región entre la parábola $y = x^2$ y la recta $y = x$. (b) Deducción de r_e y r_i cuando la región entre la parábola $y = x^2$ y la recta $y = x$ se pone a girar alrededor del eje x.

a) Determinar el volumen del sólido de revolución generado al rotar la región R alrededor del eje x (ver Figura 2.4.34). Vamos a utilizar, el método de secciones transversales perpendiculares (discos). En este caso encontramos que los radios exterior e interior son, respectivamente:

$$r_e = x \qquad \text{y} \qquad r_i = x^2.$$

Por tanto el volumen del sólido viene dado por

$$V = \pi \int_0^1 (r_e^2 - r_i^2)dx = \pi \int_0^1 (x^2 - x^4)dx = \pi \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right]_0^1 = \frac{2\pi}{15}.$$

b) Supongamos ahora que la región R gira alrededor de la recta $y = 1$ paralela al eje x (ver Figura 2.4.35(a)). Utilizando secciones transversales perpendiculares al eje de rotación, el radio interno y el radio externo r_i y r_e, respectivamente son

$$r_e = 1 - x^2 \qquad \text{y} \qquad r_i = 1 - x.$$

El volumen del sólido viene dado por

$$\begin{aligned}\mathcal{V}(S) &= \pi \int_0^1 (r_e^2 - r_i^2)dx \;=\; \pi \int_0^1 ((1-x^2)^2 - (1-x)^2)dx \\ &= \pi \int_0^1 (x^4 - 3x^2 + 2x)dx \;=\; \pi \left[\frac{x^5}{5} - x^3 + x^2\right]_0^1 \;=\; \frac{\pi}{5}.\end{aligned}$$

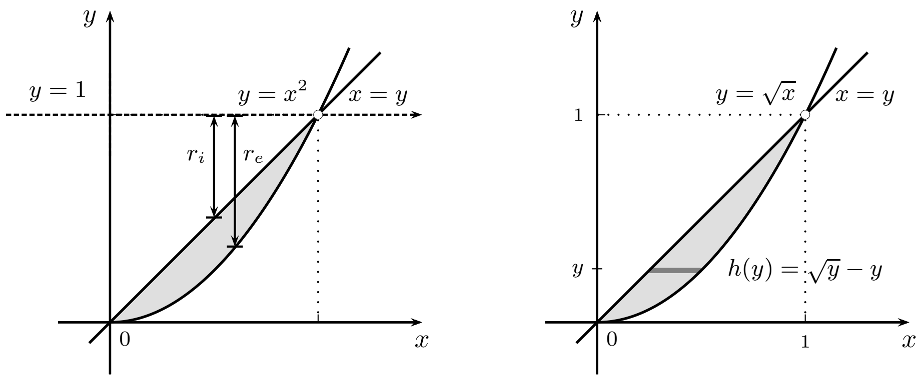


Figura 2.4.35: (a) Deducción de r_e y r_i cuando la región entre la parábola $y = x^2$ y la recta $y = x$ se pone a girar alrededor de la recta $y = 1$. (b) Deducción, utilizando cascarones cilíndricos, de la altura y el radio cuando la región entre la parábola $y = x^2$ y la recta $y = x$ se pone a girar alrededor del eje x.

c) Supongamos ahora que R gira alrededor del eje x. Vamos a utilizar el método de capas o cascarones cilíndricos (ver Figura 2.4.35(b)). En este caso es necesario observar que

$$y = x^2, \qquad y = x \qquad \Leftrightarrow \qquad x = \sqrt{y}, \quad x = y.$$

De esta forma el radio medio será y y la altura del rectángulo R será $h(y) = \sqrt{y} - y$. En este caso la integral se resuelve para valores $0 \le y \le 1$.

El volumen del sólido de revolución viene dado por

$$\mathcal{V}(S) = 2\pi \int_0^1 y(\sqrt{y} - y)dy = 2\pi \int_0^1 (y^{3/2} - y^2)dy = 2\pi \left[\frac{2}{5}y^{5/2} - \frac{y^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2\pi}{15}.$$

d) Supongamos ahora que la región R gira alrededor de la recta $y = 1$ paralela al eje x. Vamos a utilizar el método de capas o cascarones cilíndricos (ver Figura 2.4.36). En este caso, recordemos que necesitamos determinar el radio medio desde la posición y al eje de rotación $y = 1$. Por lo tanto, el radio medio es $1-y$. La altura del rectángulo R será $h(y) = \sqrt{y} - y$, para $0 \leq y \leq 1$.

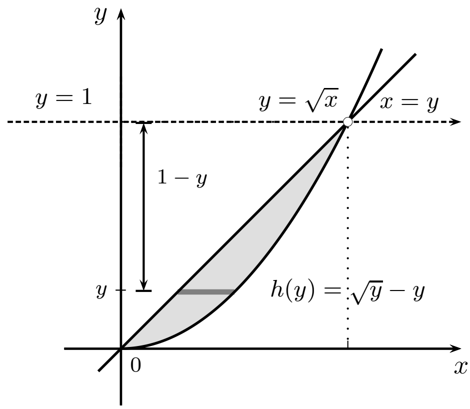


Figura 2.4.36: Deducción, utilizando cascarones cilíndricos, de la altura y el radio cuando la región entre la parábola $y = x^2$ y la recta $y = x$ se pone a girar alrededor de la recta $y = 1$.

En consecuencia, el volumen del sólido viene dado por

$$\begin{aligned}\mathcal{V}(S) &= 2\pi\int_0^1 (1-y)(\sqrt{y}-y)dy = 2\pi\int_0^1 (\sqrt{y}-y-y^{3/2}+y^2)dy \\ &= 2\pi\left[\frac{2}{3}y^{3/2}-\frac{y^2}{2}-\frac{2}{5}y^{5/2}+\frac{y^3}{3}\right]_0^1 = 2\pi\left[\frac{2}{3}-\frac{1}{2}-\frac{2}{5}+\frac{1}{3}\right] = \frac{\pi}{5}.\end{aligned}$$

Ejercicios

En los siguientes problemas utilice el método de capas cilíndricas para determinar el volumen del sólido generado al girar en torno del eje indicado la región acotada por las curvas dadas.

1. $x = y^2$, $x = 4$; el eje y.
2. $y = 2x^2$, $y = 8$; el eje y.
3. $x = 9 - y^2$, $x = 0$; el eje x.
4. $y = x^2$, $y = 2x$; la recta $y = 5$.
5. $y = 3x - x^2$, $y = 0$; el eje y.
6. $x = y^3 - y^4$, $x = 0$; la recta $y = -2$.

7. $y = x^3$, $y = 0$, $x = 2$; el eje y.

8. $y = x^3$, $y = 0$, $x = 2$; el eje x.

9. $x = y^2$, $x = 2 - y^2$; el eje x.

10. $y = 4x - x^2$, $y = 0$; el eje y.

11. $y = x^2$, $x = y^2$; la recta $y = -1$.

12. $y = x^2$, $y = x$, $0 \leq x \leq 1$; el eje y.

13. $y = x^2$, $y = x$, $0 \leq x \leq 1$; la recta $y = 2$.

14. $x = 16 - y^2$, $x = 0$, $y = 0$; $0 \leq y \leq 4$; el eje x.

2.4.3. Longitud de arco. El objetivo es calcular la longitud L de una curva correspondiente a la gráfica de una función diferenciable de la forma $y = f(x)$, para x en un intervalo cerrado $[a, b]$. Este es un problema que puede ser abordado con el concepto de integral definida. En efecto, tomemos una partición regular $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ del intervalo $[a, b]$ tal que $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ tal como se muestra en la Figura 2.4.37.

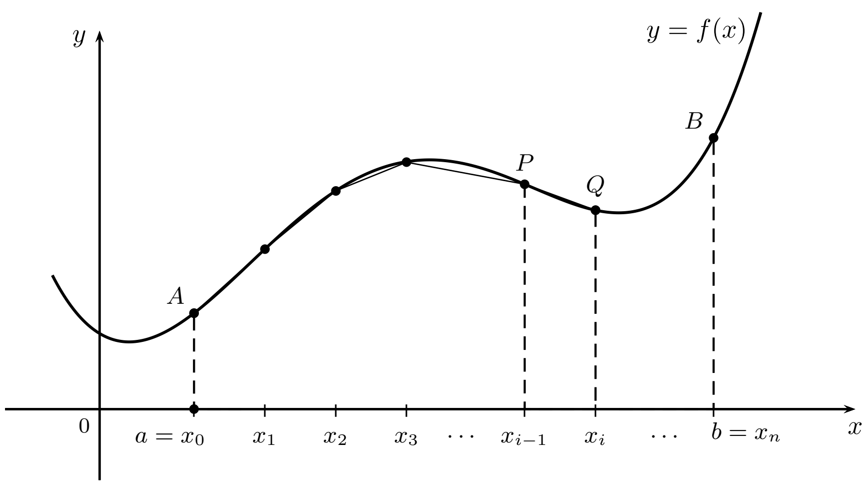


Figura 2.4.37: Longitud de la curva L entre los puntos A y B.

Tracemos segmentos de recta que unan los puntos $(x_i, f(x_i))$, $i = 0, \cdots, n - 1$. Consideremos el segmento que une los puntos $P(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ y $Q(x_i, f(x_i))$. La longitud de este segmento está dada por la fórmula:

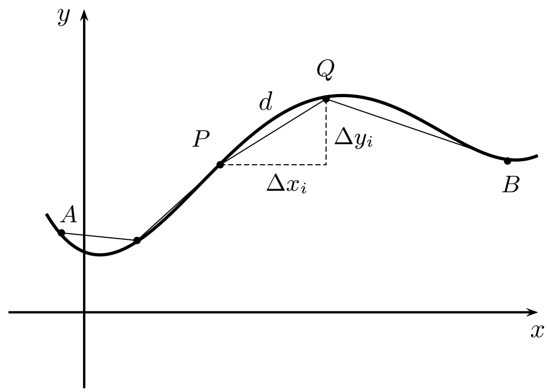


Figura 2.4.38: Deducción de $d(P,Q)$.

$$\begin{aligned} d(P,Q) &= \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} \\ &= \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}. \end{aligned}$$

Esta distancia se puede escribir así:

$$\begin{aligned} d(P,Q) &= \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 \left(1 + \frac{(f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}{(x_i - x_{i-1})^2}\right)} \\ &= |x_i - x_{i-1}| \sqrt{1 + \frac{(f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}{(x_i - x_{i-1})^2}}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, si consideramos $x_i > x_{i-1}$, tenemos que

$$d(P,Q) = (x_i - x_{i-1}) \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}\right)^2}. \tag{2.2}$$

Dado que la función f es diferenciable en (a,b), entonces podemos aplicar el teorema del valor medio en el intervalo (x_{i-1}, x_i). En consecuencia, existe un x_i^* en (x_{i-1}, x_i) tal que

$$f'(x_i^*) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}.$$

Reemplazando este valor en la ecuación (2.2), se tiene que:

$$\begin{aligned} d(P,Q) &= (x_i - x_{i-1}) \sqrt{1 + [f'(x_i^*)]^2} \\ &= \sqrt{1 + (f'(x_i^*))^2}\,\Delta_i x, \qquad (\Delta_i x = x_i - x_{i-1}). \end{aligned}$$

Vamos a aproximar la longitud de la curva L de la gráfica de f desde $A(a, f(a))$ hasta $B(b, f(b))$ como la longitud de la poligonal que une los puntos A y B. La sumas de las longitudes de los segmentos a lo largo de la poligonal que une los puntos A y B viene dada por

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(x_i^*))^2}\Delta x \approx L.$$

Notemos que ésta última es una suma de Riemann de la función $g(x) = \sqrt{1 + (f'(x_i^*))^2}$ para la partición $\mathcal{P}$ en el intervalo $[a, b]$. Por lo tanto, de nuestras discusiones sobre la integral definida, si

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(x_i^*))^2}\Delta x$$

existe sobre todas las posibles particiones $\mathcal{P}$ del intervalo $[a, b]$, y es igual a L, entonces este límite corresponde a la integral definida de la función

$$g(x) = \sqrt{1 + (f'(x))^2}, \quad a \leq x \leq b.$$

En resumen, en el caso de que $y = f(x)$ sea una función continuamente diferenciable en $[a, b]$, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 2.47. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continuamente diferenciable en $[a, b]$, entonces la longitud L de la gráfica de f entre $x = a$ e $y = b$ viene dada por*

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx.$$

Es importante resaltar que si bien la anterior fórmula resuelve el problema de calcular la longitud de una curva determinada por una función continuamente diferenciable, en la mayoría de las veces el cálculo de la integral es un problema difícil. Para que tengamos una idea de las dificultades que se presentan en el cálculo intentemos calcular la longitud de la curva asociada con $f(x) = x^4$ para $x \in [a, b]$.

Ejemplos 2.48. 1.- Calcule la longitud de la curva

$$y = \frac{x^5}{10} + \frac{1}{6x^3},$$

para x en el intervalo $1 \leq x \leq 2$.

En este caso la fórmula para calcular la integral viene dada por:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx.$$

Calculemos ahora $\frac{dy}{dx}$. Entonces

$$\frac{dy}{dx} = \frac{5x^4}{10} - \frac{3}{6x^4} = \frac{x^4}{2} - \frac{1}{2x^4}$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned}
\sqrt{1+(f'(x))^2} &= \sqrt{1+\left(\frac{x^4}{2}-\frac{1}{2x^4}\right)^2} \\
&= \sqrt{1+\left(\frac{x^8-1}{2x^4}\right)^2} \\
&= \sqrt{1+\frac{x^{16}-2x^8+1}{4x^8}} \\
&= \sqrt{\frac{4x^8+x^{16}-2x^8+1}{4x^8}} \\
&= \sqrt{\frac{x^{16}+2x^8+1}{4x^8}} \\
&= \sqrt{\frac{(x^8+1)^2}{(2x^4)^2}} = \frac{x^8+1}{2x^4} = \frac{x^4}{2} + \frac{1}{2x^4}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la longitud de la curva será entonces

$$\begin{aligned}
L = \int_1^2 \left(\frac{x^4}{2} + \frac{1}{2x^4}\right) dx &= \left(\frac{x^5}{10} - \frac{1}{6x^3}\right)\Big|_1^2 \\
&= \left(\frac{32}{10} - \frac{1}{48}\right) - \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{6}\right) = \frac{779}{240}.
\end{aligned}$$

2.- Consideremos un cable colgante entre dos postes (o torres) separados por una distancia $2b$, entonces la curva que describe el cable es una catenaria cuya ecuación está dada por $y = a\cosh(\frac{x}{a})$, donde a es una constante. La longitud de este cable está dada por la fórmula

$$L = \int_{-b}^{b} \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx.$$

Calcule la longitud del cable colgante, si la distancia entre los postes es de 200 metros y la curva que describe el cable está dada por $y = 100\cosh\left(\frac{x}{100}\right)$.

Recordemos que la función $y = \cosh(x)$ es llamada coseno hiperbólico de x y se define para $x \in \mathbb{R}$ como

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Por lo tanto, $y = 100\cosh\left(\frac{x}{100}\right)$ se puede reescribir como

$$y = 50\left(e^{\frac{x}{100}} + e^{-\frac{x}{100}}\right).$$

Derivando obtenemos que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(e^{\frac{x}{100}} - e^{-\frac{x}{100}}) \quad \text{(¿por qué?).}$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned}
1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 &= 1 + \frac{1}{4}(e^{\frac{x}{50}} - 2 + e^{-\frac{x}{50}}) \\
&= \frac{1}{4}(e^{\frac{x}{50}} + 2 + e^{-\frac{x}{50}}) \\
&= \frac{1}{4}(e^{\frac{x}{100}} + e^{-\frac{x}{100}})^2.
\end{aligned}$$

De esta forma se tendrá que la longitud de la curva es:

$$\begin{aligned}
L &= \int_{-100}^{100} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx \\
&= \int_{-100}^{100} \sqrt{\frac{1}{4}(e^{\frac{x}{100}} + e^{-\frac{x}{100}})^2}\, dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{-100}^{100} (e^{\frac{x}{100}} + e^{-\frac{x}{100}})\, dx \\
&= 50(e^{\frac{x}{100}} - e^{-\frac{x}{100}})\Big|_{-100}^{100} = 100(e - e^{-1}) \approx 235.
\end{aligned}$$

Ejercicios

I. En los siguientes problemas, establezca y simplifique la integral que proporciona la longitud del arco suave dado. No evalúe la integral.

1. $y = x^2,\ 0 \le x \le 1.$
2. $y = x^{5/2},\ 1 \le x \le 3.$
3. $y = 2x^3 - 3x^2,\ 0 \le x \le 2.$
4. $y = x^{4/3},\ -1 \le x \le 1.$
5. $y = 1 - x^2,\ 0 \le x \le 100.$
6. $x = 4y - y^2,\ 0 \le y \le 1.$
7. $x = y^4,\ -1 \le y \le 2.$
8. $x^2 = y,\ 1 \le y \le 4.$
9. $xy = 1,\ 1 \le x \le 2.$
10. $x^2 + y^2 = 4,\ 0 \le x \le 2.$

II. En los siguientes problemas, determine la longitud de arco.

1. $y = \frac{2}{3}(x^2+1)^{3/2}, \ 0 \le x \le 2.$

2. $x = \frac{2}{3}(y-1)^{3/2}, \ 1 \le y \le 5.$

3. $y = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2x}, \ 1 \le x \le 3.$

4. $x = \frac{1}{8}y^4 + \frac{1}{4y^2}, \ 1 \le y \le 2.$

5. $y^3 = 8x^2$ de $(1,2)$ a $(8,8)$.

6. $12xy - 4y^4 = 3$ de $(\frac{7}{12},1)$ a $(\frac{67}{24},2)$.

7. $(y-3)^2 = 4(x+2)^3$ de $(-1,5)$ a $(2,19)$.

2.4.4. Área de superficies. Si la gráfica de una función continua $y = f(x)$, con $a \le x \le b$, gira entorno a un eje, se genera una superficie de revolución. Nuestro objetivo es deducir una fórmula que nos permita calcular el área de la superficie generada.

En primer lugar, calculamos el área superficial de un cono truncado de altura inclinada L y radio r_1 y r_2 (ver Figura 2.4.39(a)). Lo haremos siguiendo tres pasos:

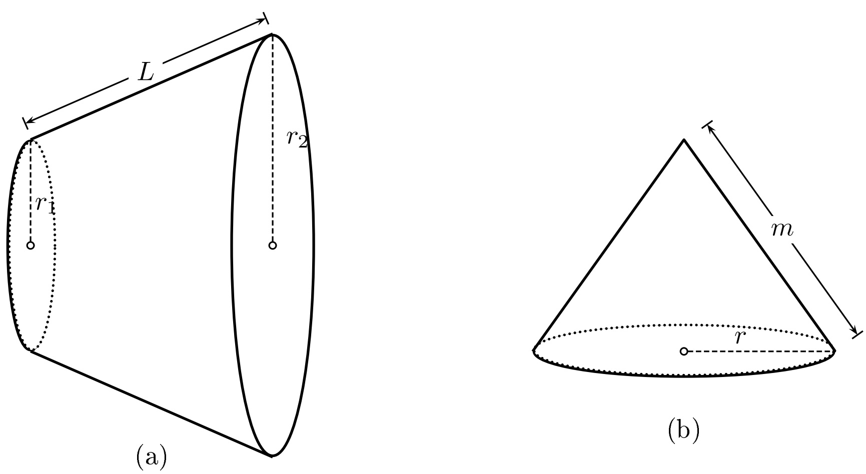


Figura 2.4.39: Deducción del área superficial de un cono truncado.

Sea R_m la región circular de radio m con ángulo subtendido θ. Entonces el área A_m de sector circular R_m viene dado por la relación proporcional

$$\frac{A_m}{\pi m^2} = \frac{\theta}{2\pi} \qquad \Leftrightarrow \qquad A_m = \frac{m^2\theta}{2}. \tag{2.3}$$

Uniendo los puntos P y Q del sector circular descrito arriba, se obtiene un cono circular recto (ver Figura 2.4.39(b)). Calculemos ahora el área superficial de este cono. Debemos tener presente que la base del cono tiene una circunferencia igual al perímetro del sector circular. Por lo tanto

$$2\pi r = \theta m \qquad \Leftrightarrow \qquad \theta = \frac{2\pi r}{m}.$$

De acuerdo con la fórmula (2.3) obtenida arriba, el área superficial S del cono viene dada por

$$S = \frac{1}{2}m^2\left(\frac{2\pi r}{m}\right) = \pi r m. \tag{2.4}$$

Finalmente estamos listos para calcular el área superficial del cono truncado de la Figura 2.4.39(a).

Si completamos un cono a partir del tronco de la Figura 2.4.39(a) tendremos el cono de la Figura 2.4.40.

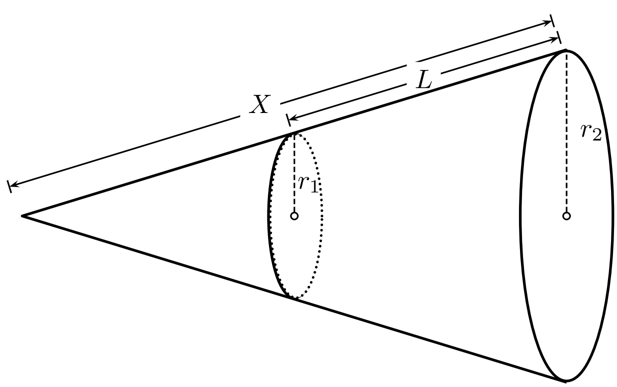


Figura 2.4.40: Completando el cono truncado.

El área superficial A del cono truncado será igual al área superficial del cono de altura inclinada X y radio r_2, menos el área superficial del cono de altura inclinada $X - L$ y radio r_1, es decir,

$$A = \pi r_2 X - \pi r_1 (X - L).$$

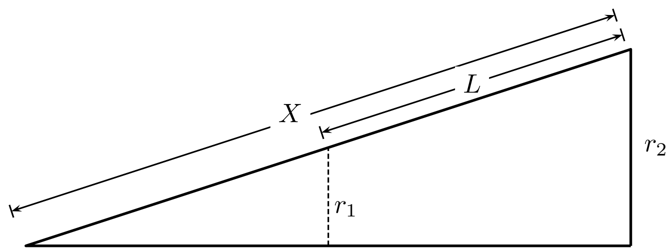


Figura 2.4.41: Sección principal del cono.

Utilizando triángulos semejantes podemos escribir X en términos de L, r_1 y r_2

$$\frac{X-L}{r_1}=\frac{X}{r_2}\quad\Leftrightarrow\quad X=\frac{r_2L}{r_2-r_1}.$$

Por lo tanto concluimos que

$$A=\pi r_2\left(\frac{r_2L}{r_2-r_1}-\pi r_1\left(\frac{r_2L}{r_2-r_1}-L\right)\right).$$

Simplificando esta última expresión se obtiene que

$$A=\pi(r_1+r_2)L=2\pi\left(\frac{r_1+r_2}{2}\right)L=2\pi\overline{r}L.$$

donde $\overline{r}$ es el radio promedio entre r_1 y r_2.

Ahora estamos en condiciones de escribir una fórmula que nos permita calcular el área de la superficie que se obtiene cuando la gráfica de una función continua $y=f(x)$, $a\le x\le b$ gira en torno a un eje. En particular tomemos como eje de giro el eje x.

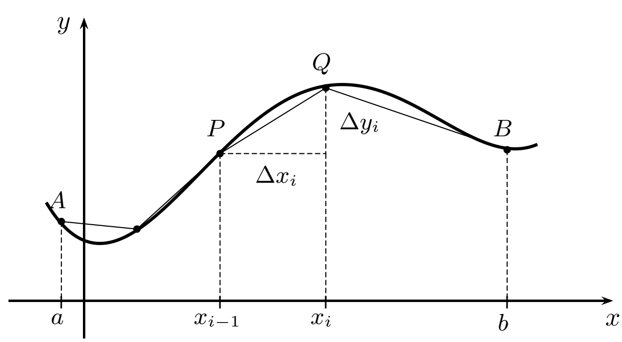


Figura 2.4.42: Curva que se va a hacer girar alrededor del eje x.

Tomemos una partición $\mathcal{P} = \{x_a, x_1, \cdots, x_n\}$ del intervalo $[a, b]$. Si el segmento de recta $\overline{PQ}$ gira en torno al eje x se genera un cono truncado de radios $f(x_{i-1})$, $f(x_i)$ y altura inclinada $\sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$, donde $\Delta y_i = f(x_i) - f(x_{i-1})$ y $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

De acuerdo con lo que ya hemos visto, el área superficial de este cono truncado es

$$A_i = 2\pi \overline{r_i} \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}.$$

donde $\overline{r_i}$ es el promedio entre $f(x_{i-1})$ y $f(x_i)$.

Utilizando el Teorema del Valor Intermedio, existe un número $d_i \in [x_{i-1}, x_i]$, tal que $f(d_i) = \overline{r_i}$. Por tanto

$$A_i = 2\pi f(d_i) \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}.$$

Esta última expresión se puede reescribir como

$$A_i = 2\pi \overline{r_i} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \Delta x_i. \tag{2.5}$$

Recordemos que

$$\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}.$$

Aplicando el teorema del valor intermedio a la función $y = f(x)$ en el intervalo $[x_{i-}, x_i]$, existe un $x_i{}^* \in (x_{i-1}, x_i)$ tal que

$$f'(x_i{}^*) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = \frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}.$$

Reemplazando $f'(x_i{}^*)$ en (2.5), se concluye que

$$A_i = 2\pi \overline{r_i} \sqrt{1 + (f'(x_i{}^*))^2} \cdot \Delta x_i.$$

Por lo tanto, el área superficial se puede aproximar sumando las áreas superficiales de los conos truncados que se generan en el intervalo $[a, b]$ para la partición $\mathcal{P}$. Por lo tanto,

$$A(S) \approx \sum_{i=1}^{n} 2\pi f(d_i). \sqrt{1 + (f'(x_i{}^*))^2} \Delta x_i,$$

cuyo lado derecho representa el área de los conos truncados generados en la partición $\mathcal{P}$. Notemos que esta suma corresponde una suma de Riemann de la función

$$g(x) = 2\pi f(d_i) \sqrt{1 + (f'(x_i{}^*))^2} \cdot \Delta x_i$$

para la partición $\mathcal{P}$. Utilizando el concepto de integral definida, tendremos que el siguiente resultado.

TEOREMA 2.49. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continuamente diferenciable en $[a, b]$, entonces el área de la superficie $A(S)$ que se genera cuando la gráfica de la función continua $y = f(x)$ gira en torno al eje x, viene dada por*

$$A(S) = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}dx.$$

De manera similar, se tiene el siguiente resultado que determina el área de la superficie cuando el eje de giro es el eje y.

TEOREMA 2.50. *Sea $g : [c, d] \to \mathbb{R}$ una función continuamente diferenciable en $[c, d]$, entonces el área de la superficie $A(S)$ que se genera cuando la gráfica de $x = g(y)$ gira en torno al eje y, viene dada por*

$$A(S) = 2\pi \int_c^d f(x)\sqrt{1 + (g'(y))^2}dy.$$

EJEMPLOS 2.51. **1.-** Considere la curva $y = x^2$, $x\epsilon[0, 1]$.

a) Calcule el área de la superficie que se genera cuando la curva gira en torno al eje x.

b) Calcule el área de la superficie que se genera cuando la curva gira en torno al eje y.

Solución.

a) En este caso la fórmula que se aplica es la siguiente:

$$A = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

De acuerdo con esta fórmula tenemos que

$$A = 2\pi \int_0^1 x^2\sqrt{1 + 4x^2}\, dx.$$

Esta integral se puede resolver haciendo uso de las técnicas estudiadas en el capítulo anterior (**resolver la integral**).

b) En este caso tenemos que

$$A = 2\pi \int_a^b x\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx = 2\pi \int_0^1 x\sqrt{1 + 4x^2}\, dx.$$

Esta integral que se resuelve sencillamente utilizando el método de sustitución. En efecto, sea $u = 1 + 4x^2$. Por tanto, $du = 8xdx$ y entonces el área de la superficie es

$$A = \frac{\pi}{4} \int_1^5 \sqrt{u}\, d = \frac{\pi}{6} u^{\frac{3}{2}}\Big|_1^5 = \frac{\pi}{6}(5^{\frac{3}{2}} - 1).$$

2.- Verificar que el área superficial de una esfera de radio r es $A(S) = 4\pi r^2$.

Primero notemos que la esfera se puede obtener cuando la curva $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, con $-r \leq x \leq r$, gira en torno al eje x. Por tanto, el área de la esfera se puede interpretar como el área de la superficie de revolución que se genera cuando la curva $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, con $-r \leq x \leq r$ rota en torno al eje x. De esta forma tenemos que

$$\begin{aligned}
A(S) &= 2\pi \int_{-r}^{r} y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx \\
&= 2\pi \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2} \sqrt{1 + \left(\frac{-2x}{2\sqrt{r^2 - x^2}}\right)^2}\, dx \\
&= 2\pi \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2} \sqrt{1 + \left(\frac{x^2}{r^2 - x^2}\right)}\, dx \\
&= 2\pi \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2} \cdot \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}\, dx \\
&= 2\pi r x \Big|_{-r}^{r} \;=\; 4\pi r^2.
\end{aligned}$$

Ejercicios

I.- En los siguientes problemas, establezca y simplifique la integral que da el área de la superficie de revolución, generada al girar el arco suave dado en torno del eje especificado. No evalúe la integral.

1. $y = x^2$, $0 \leq x \leq 4$; el eje y.
2. $y = x^2$, $0 \leq x \leq 1$; la recta $y = 4$.
3. $y = x - x^3$, $0 \leq x \leq 1$; el eje x.
4. $y = \sqrt{x}$, $1 \leq x \leq 4$; el eje y.
5. $y = x^{3/2}$, $1 \leq x \leq 4$; la recta $y = -2$.

II.- En los siguientes problemas, determine el área de la superficie de revolución generada al girar la curva en torno del eje indicado.

1. $y = \sqrt{x}$, $0 \leq x \leq 1$; el eje x.
2. $y = x^3$, $1 \leq x \leq 2$; el eje x.
3. $y^3 = 3x$, $0 \leq x \leq 9$; el eje y.
4. $x = \dfrac{1}{8}y^4 + \dfrac{1}{4y^2}$, $1 \leq y \leq 2$; el eje x.
5. $y = \dfrac{1}{5}x^5 + \dfrac{1}{12x^3}$, $1 \leq x \leq 2$; el eje y.

2.5. Evaluación del Segundo Capítulo

Punto I.

1. Determine si la afirmación dada es **Falsa** o **Verdadera**, justificando su respuesta
$$\int_0^2 u^2\sqrt{1+u^6}\,du = \frac{1}{3}\int_0^8 \sqrt{1+z^2}\,dz.$$
2. Determine si la afirmación dada es **Falsa** o **Verdadera**, justificando su respuesta
$$\int_0^2 |x^2-x|\,dx = \frac{5}{3}\,.$$
3. Sea C la curva del plano definida como la gráfica de la función
$$f(x) = \frac{x^5}{20} + \frac{1}{3x^3}.$$
Calcule la longitud de la curva C desde $x=1$ hasta $x=2$.

Punto II. Sea f definida como
$$f(s) = \int_1^{s^2} \frac{\ln(1+2\sqrt{u})}{\sqrt{u}}\,du.$$

1. Calcule $f'(s)$ y $f''(s)$.
2. Defina $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(s)\,ds$, donde f es la función considerada arriba. Muestre que $F''(0)=0$ y que $F'''(0)=4$.
3. **(Problema independiente de (1) y (2)).** Encuentre una función g tal que para $x>0$,
$$\int_1^{x^2} tg(t)\,dt = \frac{1}{2}x^4 + \int_{x^2}^4 g(t)\,dt.$$

Punto III. Sea R la región del plano limitada por la gráficas de
$$y = 16-(x-2)^4 \qquad \text{e} \qquad y = \frac{5}{3}x^2 \quad \text{(puntos de corte en } x=0 \text{ y } x=3).$$

1. Haga la gráfica de la región R.
2. Calcule el área de la región R, $\mathcal{A}(R)$, con respecto al eje x.
3. Exprese (**no calcule**) el área de la región R, $\mathcal{A}(R)$, con respecto al eje y

Punto IV. Sea R la región del plano limitada por las gráficas de $y = 1 - x^4$ e $y = (x-1)^2$ (puntos de corte en $x = 0$ y $x = 1$).

1. Calcule el volumen del sólido de revolución generado al rotar R alrededor del eje $x = 5$.
2. Calcule el volumen del sólido de revolución generado al rotar R alrededor del eje $y = -2$.

Capítulo 3

Regla de L'Hôpital, formas indeterminadas y series infinitas

En este capítulo abordaremos el cálculo de algunos límites, necesario para estudiar la convergencia de series numéricas y series de potencias.

3.1. Regla de L'Hôpital y formas indeterminadas

En esta sección estamos interesados en calcular límites de la forma

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)},$$

cuando a es un número real o inclusive $\pm\infty$.

En primer lugar, recordemos que si

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad \lim_{x\to a} g(x) = M \neq 0,$$

entonces utilizando propiedades básicas podemos ver que

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}.$$

Más aún, si tenemos que

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad \lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty,$$

podemos concluir que

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

De otro lado, si sabemos que

$$\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to a} g(x) = M \neq \pm\infty,$$

entonces tenemos que

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty \text{ ó } -\infty \quad \text{(dependiendo del signo de } M).$$

Finalmente, si suponemos que

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \neq 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to a} g(x) = 0,$$

entonces podemos ver que

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty \text{ ó } -\infty \quad \text{(dependiendo del signo de } L).$$

De las anteriores consideraciones, para completar el estudio de límites de la forma

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)},$$

sólo nos quedán por considerar los casos cuando las funciones f y g tienen uno de los siguientes comportamientos en $x = a$ (a un número real o inclusive $\pm\infty$),

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to a} g(x) = 0 \qquad \text{ó} \tag{3.1}$$

$$\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty. \tag{3.2}$$

En adelante, diremos que el cociente $\frac{f(x)}{g(x)}$ tiene la forma indeterminada $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$ cuando $x \to a$, si una las situaciones descritas en (3.1) ó (3.2) se presenta, respectivamente. Los siguientes son ejemplo de forma indeterminadas

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2}, \quad \lim_{y\to 0} \frac{\operatorname{sen} y}{y}, \quad \lim_{w\to 0} \frac{w}{\sqrt{w+1}-\sqrt{1-w}}, \quad \lim_{z\to 1^+} \frac{e^{\frac{1}{(z-1)^2}}}{\ln(z-1)}.$$

Ejemplo 3.1. ¿Cuáles de los siguientes límites presentan una de las formas indeterminadas que estamos estudiando?

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan 2x}{\ln(1+x)}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{2\operatorname{sen} x}, \quad \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{t}-t^2}{\ln t}, \quad \lim_{x\to\infty} \frac{2n^2+1}{ne^{2n}}.$$

Como recordarán del curso de Cálculo I, el cálculo de un límite requiere de manipulaciones algebraicas o de la utilización de propiedades de las funciones trigonométricas. Para ilustrar un poco lo anterior, consideremos el cálculo del siguiente límite con forma indeterminada $\frac{0}{0}$,

$$\lim_{x\to 4} \frac{x^2-16}{x^2-2x-8} = \lim_{x\to 4} \frac{(x-4)(x+4)}{(x-4)(x+2))} = \lim_{x\to 4} \frac{x+4}{x+2)} = \frac{4}{3}.$$

Vamos a ver que es posible calcular límites con formas indeterminadas $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$ utilizando la regla de L'Hôpital, la cual nos permite "evitar" en algunos casos manipulaciones algebraicas.

3.1.1. Regla de L'Hôpital. En esta sección vamos a desarrollar una técnica para el cálculo de límites indeterminados de la forma $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$, denominada **Regla de L'Hôpital**, la cual está basada en una extensión del Teorema del Valor Medio. En primer lugar, recordemos que si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es una función continua y diferenciable en (a,b), el Teorema del Valor Medio asegura la existencia de $c\in(a,b)$ tal que

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a).$$

Este resultado se puede utilizar para mostrar de forma analítica el siguiente límite conocido del curso de Cálculo I,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}=1 \quad \text{(este límite tiene la forma indeterminada } \tfrac{0}{0}\text{)}.$$

En efecto, notemos que para $x\neq 0$, el Teorema del Valor Medio implica la existencia de un c que está entre x y 0 tal que

$$\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}=\frac{\operatorname{sen}(x)-\operatorname{sen}(0)}{x}=\operatorname{sen}'(c)=\cos(c).$$

Notemos que si $x\to 0$, entonces $c\to 0$. Por lo tanto,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}=\lim_{c\to 0}\cos(c)=1.$$

En general, para formas indeterminadas de la forma $\frac{0}{0}$ cuando $x\to a$, podríamos argumentar de forma análoga al caso anterior. Más concretamente, sean $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ funciones continuas y diferenciables en (a,b) tales que $f(a)=g(a)=0$. Por tanto,

$$\lim_{x\to a}f(x)=f(a)=0 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to a}g(x)=g(a)=0.$$

Ahora del Teorema del Valor Medio aplicado a las funciones f y g, existen c_1,c_2 entre x y 0 tales que

$$f(x)=f(x)-f(a)=f'(c_1)(x-a) \quad \text{y} \quad g(x)=g(x)-g(a)=g'(c_2)(x-a).$$

Por lo tanto, cuando $g'(x)\neq 0$ en (a,b), tenemos que

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(c_1)(x-a)}{g'(c_2)(x-a)}=\frac{f'(c_1)}{g'(c_2)}.$$

Así que de forma análoga tenemos que

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(c_1)}{g'(c_2)},$$

siempre que el último límite exista. Consideremos por ejemplo el cálculo del límite,

$$L=\lim_{x\to 2}\frac{x^4-16}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{f'(c_1)}{g'(c_2)}=\lim_{c_1\to 2}\frac{4c_1^3}{1}=32.$$

Este límite se puede calcular directamente vía factorización

$$
\begin{aligned}
L = \lim_{x\to 2} \frac{x^4-16}{x-2} &= \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)(x^2+4)}{x-2} \\
&= \lim_{x\to 2} (x+2)(x^2+4) = 32.
\end{aligned}
$$

La estrategia utilizada en esta observación se puede mejorar para escoger $c_1 = c_2$, como lo veremos a continuación en la generalización del Teorema del Valor Medio.

TEOREMA 3.2 (**Teorema del Valor Medio Generalizado**). *Si f y g son funciones derivables en el intervalo (a,b), continuas en $[a,b]$ y $g'(x) \neq 0$ para todo x en (a,b), entonces existe al menos un número c en (a,b) tal que*

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Demostración. La verificación de este resultado se obtiene de forma análoga al Teorema del Valor Medio. Consideremos la función auxiliar

$$s(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x)-g(a)).$$

En primer lugar esta función es similar a la que se construyó en la demostración del Teorema del Valor Medio para derivadas. Además s está bien definida pues $g(b)-g(a) \neq 0$, es continua en $[a,b]$ y es diferenciable en (a,b). Además $s(a) = s(b) = 0$, es decir, s satisface las hipótesis del Teorema de Rolle. Así, existe al menos un número $c \in (a,b)$ tal que $s'(c) = 0$, pero sabemos que

$$s'(x) = f'(x) - \left(\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\right) g'(x).$$

Evaluando en c obtenemos que

$$s'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(c),$$

lo cual es equivalente a lo que queríamos demostrar

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}. \qquad \square$$

OBSERVACIÓN 3.3. Notemos que si $g(x) = x$, entonces el Teorema del Valor Medio Generalizado se reduce exactamente al Teorema del Valor Medio.

Estamos ahora en condiciones de presentar la regla de L'Hôpital.

TEOREMA 3.4 (**Regla de L'Hôpital**). *Sean f y g funciones derivables tales que $g'(x) \neq 0$ en un intervalo abierto alrededor de a, excepto posiblemente en a. Si*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0 \quad \text{ó} \quad \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$$

entonces

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

siempre y cuando $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ *exista, ó,* $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \pm\infty.$

La regla es válida inclusive en los casos en que $x \to a^+$, $x \to a^-$, $x \to \infty$ ó $x \to -\infty$.

Demostración. En estas notas sólo demostraremos el resultado en el caso en que el cociente $f(x)/g(x)$ tenga la forma indeterminada $0/0$, cuando $x \to a^+$. Supongamos que $\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe. Entonces tenemos que $f'(x)$ y $g'(x)$ están definidas en un intervalo $(a, b]$ en el que $g'(x) \neq 0$. Puesto que $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) = 0$, podemos definir $f(a) = 0$ y $g(a) = 0$. De esta forma f y g serán continuas por la derecha en a. Según lo anterior, las funciones f y g satisfacen las hipótesis del teorema del Valor Medio de Cauchy en el intervalo $[a, b]$, por tanto existe un número c en el intervalo (a, b) tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Puesto que $f(a) = 0$ y $g(a) = 0$, se tiene que

$$\frac{f(b)}{g(b)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Notemos que cuando $b \to a^+$, entonces tenemos que $c \to a^+$ ya que $c \in (a, b)$. En consecuencia,

$$\lim_{b\to a^+} \frac{f(b)}{g(b)} = \lim_{c\to a^+} \frac{f'(c)}{g'(c)},$$

lo que es equivalente a escribir

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

En otras palabras hemos demostrado el Teorema en este caso particular. □

La demostración para el caso en que $x \to a^-$ es similar; para los casos en que $x \to \infty$, $x \to -\infty$ o cuando la forma indeterminada sea $\frac{\infty}{\infty}$, la demostración es más compleja y la omitiremos en estas notas de clase.

Ejemplos 3.5. Calcule los siguientes límites utilizando la regla de L'Hôpital.

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}$.

b) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{1-x+\ln x}{1+\cos \pi x}$.

c) $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \frac{\ln(\ln x)}{x}$.

d) $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \frac{2n^3+n}{e^{2n}}$.

Solución.

a) Claramente el límite $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}$ tiene la forma indeterminada $\frac{0}{0}$. Ahora, este límite se puede calcular directamente multiplicando por el conjugado de la expresión

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}.$$

Más concretamente,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}} &= \lim_{x\to 0} \frac{x(\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x})}{(\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x})(\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x})} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{x(\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x})}{(\sqrt{x+1})^2-(\sqrt{1-x})^2} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{x(\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x})}{2x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x})}{2} = 1.
\end{aligned}$$

Aplicando la regla de L'Hôpital al mismo límite, obtenemos que

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\frac{1}{2\sqrt{x+1}}+\frac{1}{2\sqrt{1-x}}} = 1.$$

En este caso, utilizar la regla de L'Hôpital resulta más sencillo.

b) Puesto que

$$\lim_{x\to 1} (1-x+\ln x) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 1} (1+\cos(\pi x)) = 0,$$

entonces el límite

$$\lim_{x\to 1} \frac{1-x+\ln x}{1+\cos \pi x}$$

tiene la forma $\frac{0}{0}$ y podemos aplicar la regla de L'Hôpital. En este caso tenemos que,

$$\lim_{x\to 1} \frac{1-x+\ln x}{1+\cos \pi x} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{d}{dx}(1-x+\ln x)}{\frac{d}{dx}(1+\cos \pi x)} = \lim_{x\to 1} \frac{-1+\frac{1}{x}}{-\pi \operatorname{sen} \pi x}.$$

Nuevamente se observa que este último límite tiene la forma $\frac{0}{0}$ dado que

$$\lim_{x\to 1}\left(-1+\frac{1}{x}\right)=0 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 1}(-\pi \operatorname{sen}\pi x)=0.$$

En consecuencia podemos aplicar de nuevo la regla de L'Hôpital. En este caso tenemos que

$$\lim_{x\to 1}\frac{-1+\frac{1}{x}}{-\pi \operatorname{sen}\pi x}=\lim_{x\to 1}\frac{-\frac{1}{x^2}}{-\pi^2\cos\pi x}=-\frac{1}{\pi^2},$$

lo cual se obtiene al evaluar simplemente en $x=1$.

c) El límite

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(\ln(x))}{x}$$

tiene la forma indeterminada $\frac{\infty}{\infty}$. Aplicando la regla de L'Hospital:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(\ln(x))}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x\ln(x)}}{1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x\ln(x)}=0.$$

Observación 3.6. Para resolver el siguiente límite primero debemos hacer la siguiente aclaración.

Sea f una función de valor real y supongamos que el límite $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ existe, es $\pm\infty$, o no existe. Entonces el límite tomando n sobre los números naturales, $\lim\limits_{n\to\infty} f(n)$ existe, es $\pm\infty$, o no existe, respectivamente. Más aún,

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{n\to\infty} f(n).$$

En consecuencia, en el caso en que la variable n sea un número natural, podemos aplicar la regla de L'Hôpital suponiendo que dicha variable es real.

d) Recordemos que estamos interesados en el límite

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2n^3+n}{e^{2n}}.$$

En este ejemplo particular, el límite

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2n^3+n}{e^{2n}}$$

tiene la forma $\frac{\infty}{\infty}$. Aplicando L'Hôpital,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2n^3+n}{e^{2n}}=\lim_{x\to\infty}\frac{6n^2+1}{2e^{2n}},$$

el cual también tiene la forma ∞/∞. Por lo tanto aplicando **dos veces** la regla de L'Hôpital se tiene que

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2n^3+n}{e^{2n}}=\lim_{x\to\infty}\frac{6n^2+1}{2e^{2n}}=\lim_{x\to\infty}\frac{12n}{4e^{2n}}=\lim_{x\to\infty}\frac{12}{8e^{2n}}=0.$$

Observación 3.7 (**UN ERROR COMÚN**). Se debe prestar mucha atención al aplicar la regla de L'Hôpital, pues hay límites en los que esta regla no es aplicable; por ejemplo consideremos el límite

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)}{x+1}=\frac{\cos(0)}{0+1}=1.$$

Si de manera incauta aplicamos la regla de L'Hôpital obtenemos una contradicción, puesto que

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)}{x+1}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x)}{1}=\frac{0}{1}=0.$$

Este último procedimiento es errado ya que el límite $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x}{x+1}$ no tiene la forma indeterminada $\frac{0}{0}$, ni la forma $\frac{\infty}{\infty}$.

Ejercicios

Calcule los siguientes límites utilizando la regla de L'Hôpital.

1. $\lim\limits_{z\to 1}\dfrac{z-1}{z^2}$.
2. $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{e^{3z}-1}{z}$.
3. $\lim\limits_{z\to 0^+}\dfrac{\operatorname{sen} z^2}{z}$.
4. $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{1-\cos z}{z^3}$.
5. $\lim\limits_{z\to \pi/2}\dfrac{1+\cos 2z}{1-\operatorname{sen} 2z}$.
6. $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{z-\arctan z}{z^3}$.
7. $\lim\limits_{z\to \infty}\dfrac{e^z}{(z+1)^4}$.
8. $\lim\limits_{z\to \infty}\dfrac{z^2+1}{z\ln z}$.
9. $\lim\limits_{z\to (\pi/2)^-}\dfrac{\tan z}{\ln(\cos z)}$.
10. $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{e^z-e^{-z}}{z}$.
11. $\lim\limits_{z\to 2}\dfrac{z^3-8}{z^4-16}$.
12. $\lim\limits_{t\to \infty}\dfrac{\sqrt{t^2+4}}{t}$.
13. $\lim\limits_{t\to \infty}\dfrac{2^t}{3^t}$.
14. $\lim\limits_{t\to \infty}\dfrac{\sqrt{t^3+t}}{\sqrt{2x^3-4}}$.
15. $\lim\limits_{t\to \infty}\dfrac{\ln(\ln t)}{t\ln t}$.
16. $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} t-\tan t}{t^3}$.
17. $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{e^{3t}-e^{-3t}}{2t}$.
18. $\lim\limits_{t\to \pi/2}\dfrac{\sec t}{\tan t}$.
19. $\lim\limits_{t\to 1/2}\dfrac{2t-\operatorname{sen}\pi t}{4t^2-1}$.
20. $\lim\limits_{t\to \infty}\dfrac{\arctan 2t}{\arctan 3t}$.
21. $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sqrt{3+2t}-\sqrt{3+t}}{t}$.
22. $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3t}-1}{t}$.
23. $\lim\limits_{t\to \pi/4}\dfrac{1-\tan t}{4t-\pi}$.
24. $\lim\limits_{t\to 2}\dfrac{t^5-5t^2-12}{t^{10}-500t-24}$.

3.1.2. Formas indeterminadas: $0 \cdot \infty$, 1^{∞}, 0^0, ∞^0, $\infty - \infty$.

Además de las formas $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$, las formas $0.\infty$, 1^{∞}, 0^0, ∞^0, e $\infty - \infty$ también son consideradas como formas indeterminadas. Se puede mostrar que todas éstas se pueden transformar en la forma indeterminada $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$.

Forma Indeterminada $0 \cdot \infty$. El caso más simple, pero clave para calcular límites de la forma indeterminada 1^{∞}, 0^0, ∞^0, ocurre cuando el límite tiene la forma $0 \cdot \infty$. Es decir, supongamos que

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0 \qquad \text{ó} \qquad \lim_{x \to a} g(x) = \pm\infty.$$

En este caso diremos que el límite

$$\lim_{x \to a} f(x)g(x)$$

tiene la forma indeterminada $0 \cdot \infty$. Observemos que este límite se puede escribir como el límite de un cociente con forma indeterminada $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$,

$$\begin{aligned} \lim_{x \to a} f(x)g(x) &= \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \qquad \text{(forma indeterminada } \tfrac{0}{0}\text{)} \\ &= \lim_{x \to a} \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}} \qquad \text{(forma indeterminada } \tfrac{\infty}{\infty}\text{)}. \end{aligned}$$

Ejemplo 3.8. Calcular el límite

$$\lim_{y \to 0^+} y^2 \ln(y).$$

Este límite tiene la forma indeterminada $0 \cdot \infty$. Entonces,

$$\begin{aligned} \lim_{y \to 0^+} y^2 \ln(y) &= \lim_{y \to 0^+} \frac{\ln(y)}{\frac{1}{y^2}} \qquad \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \\ &= \lim_{y \to 0^+} \frac{\frac{1}{y}}{\frac{-2}{y^3}} = \lim_{y \to 0^+} \frac{y^2}{(-2)} = 0. \end{aligned}$$

Formas Indeterminadas 1^{∞} y 0^0, ∞^0. A continuación vamos a ver que estas formas indeterminadas se pueden llevar a la forma $0 \cdot \infty$; y en consecuencia se pueden convertir en la forma $\frac{0}{0}$ ó en la forma $\frac{\infty}{\infty}$. Para ello utilizaremos la relación existente entre la función exponencial $h(x) = e^x$ y su inversa, la función logaritmo $k(y) = \ln(y)$. Más concretamente, supongamos que $f(x) > 0$ para todo x y consideremos una función de tipo exponencial

$$s(x) = [f(x)]^{g(x)}.$$

Entonces, aplicando logaritmo natural a la función s tenemos que

$$r(x) = \ln(s(x)) = \ln\left([f(x)]^{g(x)}\right) = g(x)\ln(f(x)) \iff s(x) = e^{r(x)}.$$

Por lo tanto, tenemos la siguiente equivalencia de límites (en el caso de que existan)

$$\lim_{x\to a} s(x) = \lim_{x\to a} [f(x)]^{g(x)} \quad \text{tiene la forma } 1^{\infty},\ 0^{\infty},\ \infty^{0}$$

$$\Updownarrow$$

$$\lim_{x\to a} r(x) = \lim_{x\to a} \ln\left([f(x)]^{g(x)}\right) = \lim_{x\to a} [g(x)\ln(f(x))] \quad \text{tiene la forma } 0\cdot\infty.$$

En consecuencia, podemos estudiar el límite $\lim\limits_{x\to a} s(x)$ calculando el límite $\lim\limits_{x\to a} r(x) = L$, después de observar la siguiente equivalencia,

$$\lim_{x\to a} r(x) = L \qquad \iff \qquad \lim_{x\to a} s(x) = e^{\left(\lim\limits_{x\to a} r(x)\right)} = e^{L}.$$

Ejemplos 3.9. Calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}$.

Este límite debe ser familiar para el lector pues es común resolverlo cuando se estudia el número de **Euler** e en el curso de Cálculo I. Veamos cómo se calcula este límite haciendo uso de la regla de L'Hôpital. Observemos que la expresión $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}$ tiene la forma indeterminada 1^{∞}, cuando $x\to 0$. No olvidemos que el objetivo es llevarla a la forma $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$.

Consideremos $y = \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}$. Aplicando la función logaritmo natural en ambos lados se tendrá después de aplicar propiedades de la función logarítmica

$$\ln y = x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}.$$

Note que el límite $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}$ tiene la forma indeterminada $\frac{0}{0}$. Apliquemos ahora si la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to\infty}\ln y = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x}} = 1.$$

Por lo tanto, hemos llegado a que

$$\lim_{x\to\infty}\ln y = 1.$$

Aplicando la función exponencial en ambos lados de esta última igualdad se tendrá que

$$e^{\left(\lim\limits_{x\to\infty} \ln y\right)} = e^1 = e.$$

Por la continuidad de la función exponencial, podemos escribir:

$$\lim_{x\to\infty} e^{\ln y} = e.$$

Puesto que $e^{\ln y} = y$, se tiene finalmente

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty} y = \lim_{x\to\infty} e^{\ln(y)} = e.$$

b) $\lim\limits_{x\to 0} (1 + \operatorname{sen}^2(2x))^{\frac{3}{x^2}}$.

Este límite tiene la forma indeterminada 1^∞.

Definamos la función $y = (1 + \operatorname{sen}^2(2x))^{\frac{3}{x^2}}$. Entonces, utilizando la propiedad de la función logaritmo $\ln(a^r) = r\ln(a)$ concluimos que

$$\ln(y) = \ln((1 + \operatorname{sen}^2(2x))^{\frac{3}{x^2}} = \frac{3\ln((1 + \operatorname{sen}^2(2x))}{x^2}.$$

Por lo tanto, $\lim\limits_{x\to 0} \ln(y)$ tiene la forma indeterminada $0/0$. Utilizando L'Hôpital,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \ln(y) &= \lim_{x\to 0} \frac{3\ln((1 + \operatorname{sen}^2(2x))}{x^2} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{(3)(2)(2)\operatorname{sen}(2x)\cos(2x)}{(2)x(1 + \operatorname{sen}^2(2x))} \\
&= (3)(4)\lim_{x\to 0} \left[\left(\frac{\operatorname{sen}(2x)}{2x}\right)\left(\frac{\cos(2x)}{1 + \operatorname{sen}^2(2x)}\right)\right] \\
&= (3)(4)\lim_{x\to 0} \left[\frac{\operatorname{sen}(2x)}{2x}\right] \lim_{x\to 0} \left[\frac{\cos(2x)}{1 + \operatorname{sen}^2(2x)}\right] \\
&= (12)(1)(1) = 12,
\end{aligned}$$

pues como ya sabemos

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\operatorname{sen}(2x)}{2x}\right) = 1.$$

Forma Indeterminada $\infty - \infty$. Para el cálculo de límites de la forma $\infty - \infty$ es necesario efectuar operaciones algebraicas con el fin de obtener la forma indeterminada $0/0$ ó ∞/∞. Para ilustrar lo anterior consideremos los siguientes ejemplos.

Ejemplos 3.10. a) Calcular, si existe, el límite

$$\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right).$$

En primer lugar, se debe verificar que se tiene una forma indeterminada. En efecto, cuando $x \to 1^+$ la expresión $\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}$ tiene la forma indeterminada $\infty - \infty$. Colocando denominador común vemos que

$$\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right) = \lim_{x\to 1^+}\frac{\ln x - x + 1}{(x-1)\ln x}.$$

Observe que este último límite presenta la forma indeterminada $\frac{0}{0}$. Aplicando la regla de L'Hôpital obtenemos:

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{\ln x - x + 1}{(x-1)\ln x} = \lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{1}{x}-1}{\ln x + (x-1)\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 1^+}\frac{\dfrac{1}{x}-1}{\ln x + 1 - \dfrac{1}{x}}.$$

Nuevamente es posible aplicar la regla de L'Hôpital (¿por qué?), obteniendo

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{\dfrac{1}{x}-1}{\ln x + 1 - \dfrac{1}{x}} = \lim_{x\to 1^+}\frac{-\dfrac{1}{x^2}}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}} = -\frac{1}{2}.$$

En otras palabras,

$$\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right) = -\frac{1}{2}.$$

b) Calcular, si existe, el límite $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\sqrt{n+2}\,$.

Notemos que este límite tiene la forma $\infty - \infty$. Racionalizando (multiplicando por el conjugado de $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$) obtenemos que

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} = \frac{1}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}.$$

Utilizando este cálculo concluimos que

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\sqrt{n+2} &= \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+2}}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\dfrac{n+1}{n+2}}+\sqrt{\dfrac{n}{n+2}}} = \frac{1}{2},\end{aligned}$$

dado que por la continuidad del la función raíz cuadrada y la regla de L'Hôpital, tenemos que

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n+1}{n+2}} = \sqrt{\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+2}} = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{n+2}} = \sqrt{\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+2}} = 1.$$

Ejercicios

Calcule los siguientes límites vía la regla de L'Hôpital.

1. $\lim\limits_{z\to 0} z\cot z$.

2. $\lim\limits_{z\to 0^+} (\operatorname{sen} z)(\ln \operatorname{sen} z)$.

3. $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{1}{z}\ln\left(\dfrac{7z+8}{4z+8}\right)$.

4. $\lim\limits_{z\to 0} \left(\dfrac{1}{z}-\cot z\right)$.

5. $\lim\limits_{z\to 0^+} z(e^{1/z}-1)$.

6. $\lim\limits_{z\to 0} z^2\csc^2 2z$.

7. $\lim\limits_{z\to \infty} e^{-z}\ln z$.

8. $\lim\limits_{t\to \infty} t(e^{1/t}-1)$.

9. $\lim\limits_{t\to \infty} e^{-t^2}(t-\operatorname{sen} t)$.

10. $\lim\limits_{z\to 0^+} z\ln z$.

11. $\lim\limits_{t\to \pi/2} (\tan t)(\cos 3t)$.

12. $\lim\limits_{t\to \pi} (t-\pi)\csc t$.

13. $\lim\limits_{x\to 2} \left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{\ln(x-1)}\right)$.

14. $\lim\limits_{t\to 0^+} \left(\dfrac{1}{\sqrt{t}}-\dfrac{1}{\operatorname{sen} t}\right)$.

15. $\lim\limits_{t\to 0} \left(\dfrac{1}{t}-\dfrac{1}{e^t-1}\right)$.

16. $\lim\limits_{t\to 1^+} \left(\dfrac{t}{t^2+t-2}-\dfrac{1}{t-1}\right)$.

17. $\lim\limits_{t\to 2^+} \left(\dfrac{1}{\sqrt{t^2-4}}-\dfrac{1}{t-2}\right)$.

18. $\lim\limits_{t\to 0} \left(\dfrac{1}{t}-\dfrac{1}{\ln(1+t)}\right)$.

19. $\lim\limits_{t\to \infty} (\sqrt{t^2+t}-\sqrt{t^2-t})$.

20. $\lim\limits_{t\to \infty} (\sqrt[3]{t^3+2t+5}-t)$.

21. $\lim\limits_{z\to 0^+} z^z$.

22. $\lim\limits_{z\to 0^+} z^{\operatorname{sen} z}$.

23. $\lim\limits_{t\to \infty} \left(1+\dfrac{1}{t}\right)^t$.

24. $\lim\limits_{t\to \infty} \left(1-\dfrac{1}{t^2}\right)^t$.

25. $\lim\limits_{t\to 0} \left(\dfrac{\operatorname{sen} t}{t}\right)^{1/t^2}$.

26. $\lim\limits_{t\to \infty} \left(\cos\dfrac{1}{t^2}\right)^{t^4}$.

27. $\lim\limits_{z\to 0^+} (1+2z)^{1/(3z)}$.

28. $\lim\limits_{t\to \infty} (\ln t)^{1/t}$.

29. $\lim\limits_{z\to 0^+} (\operatorname{sen} z)^{\sec z}$.

30. $\lim\limits_{z\to 0^+} (z + \operatorname{sen} z)^{z}$.

31. $\lim\limits_{z\to \pi/2} (\tan z - \sec z)$.

32. $\lim\limits_{t\to 1} t^{1/(1-t)}$.

33. $\lim\limits_{t\to 1^+} (t-1)^{\ln t}$.

34. $\lim\limits_{t\to \infty} (\sqrt{t+1} - \sqrt{t})$.

35. $\lim\limits_{t\to \infty} (\sqrt[5]{t^5 - 3t^4 + 17} - t)$.

3.1.3. Integrales impropias. Recordemos que la definición de la integral definida requirió de dos imposiciones básicas:

1.- El dominio de definición de las funciones es un intervalo cerrado finito de la forma $[a,b]$.

2.- Las funciones son acotadas en $[a,b]$, para garantizar la buena definición de las sumas de Riemann. Recordemos que una función se dice acotada en $[a,b]$, si existe constantes reales m, M tal que

$$m \leq f(t) \leq M, \quad \text{para todo } x \in [a,b].$$

En otras palabras, la gráfica de la función f está limitada entre las rectas $y = m$ y $y = M$ sobre el intervalo $[a,b]$.

Ahora estamos interesados en tener algún tipo de extensión del concepto de integral definida que pueda ser utilizado en los siguientes casos:

1.- **Intervalos infinitos**. Vamos a considerar funciones acotadas definidas en intervalos infinitos de la forma: $(-\infty, a]$, $[a, \infty)$ ó $(-\infty, \infty)$.

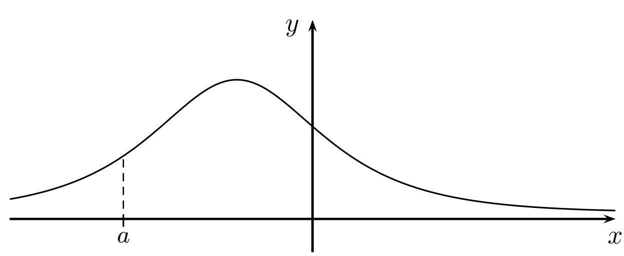


Figura 3.1.1: Funciones acotadas en intervalos infinitos.

2.- **Funciones no acotadas en intervalos infinitos**. Vamos a considerar funciones **no** acotadas definidas en un intervalo cerrado $[a,b]$ tales que satisfacen una de las condiciones con $c \in (a,b)$:

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty \quad \text{ó} \quad \lim_{x\to b^-} f(x) = \pm\infty \quad \text{ó} \quad \lim_{x\to c^\pm} f(x) = \pm\infty.$$

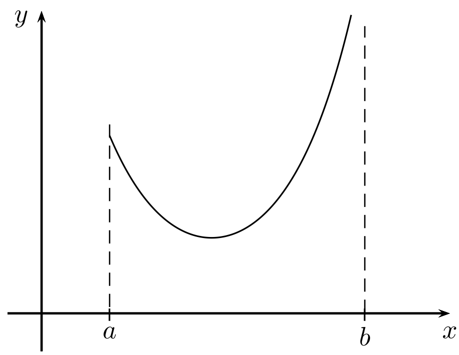


Figura 3.1.2: Funciones no acotadas en intervalos finitos.

Integrales impropias en intervalos infinitos: $[a,\infty)$**,** $(-\infty,a]$ **ó** $(-\infty,\infty)$. Para ilustrar el concepto de integral que deseamos introducir, denominado **integral impropia**, consideremos el siguiente problema: Sea $\mathcal{R}$ la región que se encuentra bajo la gráfica de $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, sobre el eje x y a la derecha de la recta $x=1$. Calcular, si existe, el área $\mathcal{A}(\mathcal{R})$ de la región $\mathcal{R}$.

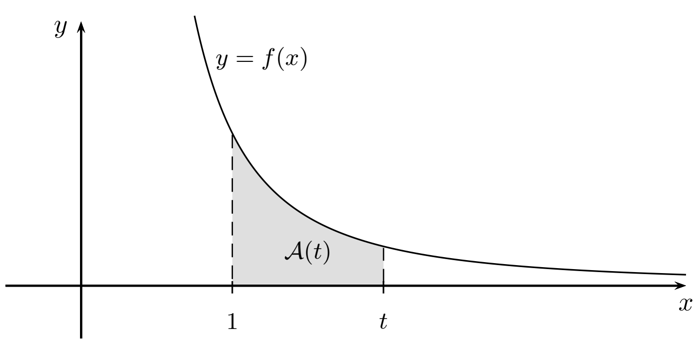


Figura 3.1.3: Gráfica de $y = \dfrac{1}{x^2}$ para $x \geq 1$.

La primera observación es que para cada $t > 1$, el área $\mathcal{A}(t)$ bajo la gráfica de f entre $x = 1$ y $x = t$ está bien definida y viene dada por

$$\mathcal{A}(t) = \int_1^t \frac{1}{x^2}\,dx.$$

Más aún, se puede ver directamente que $\lim_{t\to\infty} \mathcal{A}(t)$ existe. En efecto,

$$\lim_{t\to\infty} \mathcal{A}(t) = \lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{t\to\infty} \left(-\frac{1}{x}\right)_1^t = \lim_{t\to\infty} \left(1 - \frac{1}{t}\right) = 1.$$

Por lo tanto, tiene sentido **considerar** el área bajo la gráfica de $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ sobre $[1, \infty)$ y la podríamos **definir** de forma natural como

$$\mathcal{A}(\mathcal{R}) = \lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{1}{x^2}\,dx = 1.$$

Notemos que en este caso podemos adoptar la siguiente notación:

$$\lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{1}{x^2}\,dx := \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx.$$

En general, si f es una función continua en el intervalo $[a, \infty)$ tal que límite

$$\lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)\,dx$$

existe, diremos que la integral impropia $\displaystyle\int_a^\infty f(x)dx$ es convergente y utilizamos la notación

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)\,dx.$$

En caso de que el límite no exista decimos que la integral impropia es divergente.

Según la definición anterior, la integral impropia $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$ converge y

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{1}{x^2}\,dx = 1.$$

De forma análoga, si f es una función continua en el intervalo $(-\infty, a]$ tal el límite

$$\lim_{t\to-\infty} \int_t^a f(x)\,dx$$

existe, diremos que la integral impropia $\displaystyle\int_{-\infty}^a f(x)dx$ es convergente y escribimos

$$\int_{-\infty}^a f(x)\,dx = \lim_{t\to-\infty} \int_t^a f(x)\,dx.$$

En caso de que el límite no exista decimos que la integral impropia es divergente.

EJEMPLOS 3.11. 1.- Verificar que la integral impropia

$$\int_{-\infty}^{\ln(2)} xe^{2x}\,dx$$

es convergente.

Solución. Empecemos por calcular la antiderivada o la integral indefinida $\int xe^{2x}\,dx$. Para ello utilizaremos integración por partes. Tomemos $u = x$ y $dv = e^{2x}dx$. Entonces, $du = dx$ y $v = \frac{1}{2}e^{2x}$. Por lo tanto,

$$\int xe^{2x}\,dx = \frac{xe^{2x}}{2} - \frac{1}{2}\int e^{2x}\,dx = \frac{xe^{2x}}{2} - \frac{1}{4}e^{2x} = \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\right)e^{2x}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\lim_{t\to-\infty}\int_{t}^{\ln(2)} xe^{2x}\,dx &= \lim_{t\to-\infty}\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\right)e^{2x}\Big|_{t}^{\ln(2)}\\ &= \lim_{t\to-\infty}\left[4\left(\frac{\ln(2)}{2} - \frac{1}{4}\right) - \left(\frac{t}{2} - \frac{1}{4}\right)e^{2t}\right]\\ &= 4\left(\frac{\ln(2)}{2} - \frac{1}{4}\right) = 2\ln(2) - 1,\end{aligned}$$

donde hemos utilizado la regla de L'Hôpital para verificar que

$$\lim\left(\frac{t}{2} - \frac{1}{4}\right)e^{2t} = 0.$$

2.- **No toda integral impropia es convergente**. Este hecho se puede apreciar al verificar que la integral impropia $\int_1^{\infty}\frac{1}{x}\,dx$ es divergente. En efecto,

$$\int_1^{\infty}\frac{1}{x}\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^t\frac{1}{x}dx = \lim_{t\to\infty}\ln|x|\Big]_1^t = \lim_{t\to\infty}(\ln|t| - \ln|1|) = \infty.$$

En el caso en que f sea una función continua en $(-\infty,\infty)$, diremos que la integral impropia

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$$

es convergente si las integrales

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx \qquad \text{y} \qquad \int_{a}^{\infty} f(x)\,dx$$

son convergentes para cada $a \in \mathbb{R}$. En este caso, denotamos la integral impropia como

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{\infty} f(x)\,dx.$$

En caso en que al menos una de las siguientes integrales impropias

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx \qquad \text{ó} \qquad \int_{a}^{\infty} f(x)\,dx$$

sea divergente, diremos que la integral impropia $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ es divergente.

Ejemplo 3.12. Determinar la convergencia o divergencia de la integral impropia

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{e^{x^2}}\,dx.$$

Primero calculemos una integral indefinida, vía el método de sustitución. Para ello, consideremos la sustitución $u = x^2$. En este caso tenemos que

$$du = 2xdx \quad \Leftrightarrow \quad \frac{du}{2} = xdx.$$

Reemplazando tenemos que

$$\int \frac{x}{e^{x^2}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{e^u}du = \frac{1}{2}\int e^{-u}du = -\frac{1}{2}e^{-u} + C = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C.$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{e^{x^2}}dx &= \int_{-\infty}^{0} xe^{-x^2}dx + \int_{0}^{\infty} xe^{-x^2}dx \\
&= \lim_{t\to-\infty}\int_{t}^{0} xe^{-x^2}dx + \lim_{t\to\infty}\int_{0}^{t} xe^{-x^2}dx \\
&= \lim_{t\to-\infty} -\frac{1}{2}e^{-x^2}\Big]_{t}^{0} + \lim_{t\to\infty} -\frac{1}{2}e^{-x^2}\Big]_{0}^{t} \\
&= \lim_{t\to-\infty}\Big(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-t^2}\Big) + \lim_{t\to\infty}\Big(-\frac{1}{2}e^{-t^2} + \frac{1}{2}\Big) \\
&= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \lim_{t\to-\infty}\frac{1}{e^{t^2}} - \lim_{t\to\infty}\frac{1}{2e^{t^2}} + \frac{1}{2} \;=\; -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \;=\; 0.
\end{aligned}$$

En otras palabras, la integral impropia $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{e^{x^2}}dx$ es convergente.

Más aún, para cada $a \in \mathbb{R}$, las integrales impropias

$$\int_{a}^{\infty} \frac{x}{e^{x^2}}dx \quad \text{y} \quad \int_{-\infty}^{a} \frac{x}{e^{x^2}}dx$$

son también convergentes. En particular,

$$\int_{a}^{\infty} \frac{x}{e^{x^2}}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_{a}^{b} \frac{x}{e^{x^2}}\,dx = \frac{1}{2}e^{-a^2}.$$

Integrales Impropias en Intervalos Finitos.

Supongamos que f es una función continua en el intervalo $[a, b)$ y que $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = \pm\infty$. Es decir, f tiene una asíntota vertical en $x = b$.

Si el límite

$$\lim_{t\to b^-} \int_a^t f(x)dx$$

existe, diremos que la integral impropia $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ converge y escribimos

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to b^-} \int_a^t f(x)dx.$$

En caso contrario diremos que la integral impropia diverge.

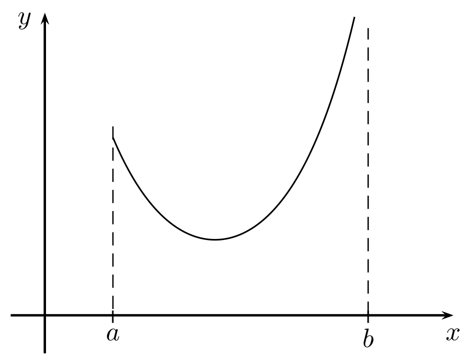


Figura 3.1.4: Funciones no acotadas en intervalos finitos $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = \infty$.

De forma análoga, sea f una función continua en el intervalo $(a, b]$ tal que $\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$.

Si el límite

$$\lim_{t\to a^+} \int_t^b f(x)dx$$

existe, diremos que la integral impropia $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ converge y escribimos

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to a^+} \int_t^b f(x)dx.$$

En caso contrario diremos que la integral impropia diverge.

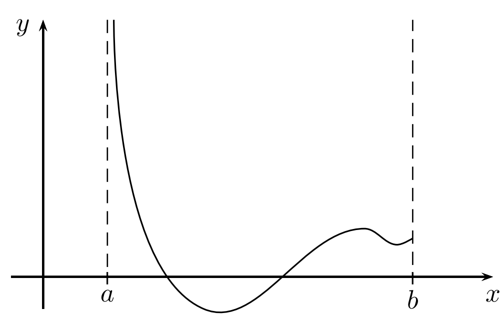


Figura 3.1.5: Funciones no acotadas en intervalos finitos $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \infty$.

De manera similar, sea f una función continua en $[a, b]$, excepto en un número $c \in (a, b)$ para el cual $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \pm\infty$.

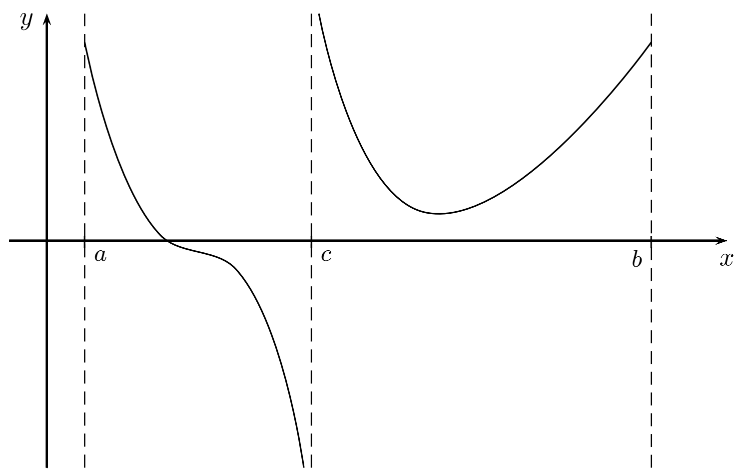


Figura 3.1.6: Funciones no acotadas en intervalos finitos. $\lim\limits_{x\to c^-} f(x) = -\infty$.

Diremos que la integral impropia $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ converge, si los límites

$$\lim_{t\to c^-}\int_a^t f(x)dx \qquad \text{y} \qquad \lim_{t\to c^+}\int_c^t f(x)dx$$

existen. En este caso escribimos

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx\\ &= \lim_{t\to c^-}\int_a^t f(x)dx + \lim_{t\to c^+}\int_c^t f(x)dx.\end{aligned}$$

En caso contrario la integral impropia diverge.

Ejemplos 3.13. En los siguientes ejemplos vamos a determinar la convergencia o divergencia de las siguientes integrales impropias, en el caso en que éstas sean impropias.

$$\text{a)}\ \int_0^1 \frac{1}{(x+1)\ln(x+1)}dx, \qquad \text{b)}\ \int_1^3 \frac{1}{(x-2)^{4/3}}\,dx, \qquad \text{c)}\ \int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx.$$

a) En primer lugar, note que la integral

$$\int_0^1 \frac{1}{(x+1)\ln(x+1)}dx$$

es una integral impropia pues la función $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)\ln(x+1)}$ es continua en $(0,1]$ y

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{(x+1)\ln(x+1)} = +\infty \qquad (\text{¡}\textit{verifíquelo}!).$$

Calculemos primero una antiderivada de la función $\dfrac{1}{(x+1)\ln(x+1)}$. Si hacemos la sustitución $u = \ln(x+1)$, entonces tenemos que, $du = \dfrac{dx}{x+1}$. Reemplazando en la integral indefinida obtenemos que

$$\int \frac{1}{(x+1)\ln(x+1)}\,dx = \int \frac{1}{u}\,du = \ln|u| + C = \ln|\ln(x+1)| + C.$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1}{(x+1)\ln(x+1)}dx &= \lim_{t\to 0^+} \int_0^1 \frac{1}{(x+1)\ln(x+1)}dx \\
&= \lim_{t\to 0^+} \ln|\ln(x+1)|\Big]_t^1 \\
&= \ln|\ln(2)| - \lim_{t\to 0^+} \ln|\ln(t+1)| \\
&= \ln|\ln(2)| - (-\infty) = \infty.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la integral impropia $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(x+1)\ln(x+1)}dx$ es divergente.

b) La integral

$$\int_1^3 \frac{1}{(x-2)^{\frac{4}{3}}}dx$$

es impropia pues $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{1}{(x-2)^{4/3}} = \infty$. Ahora,

$$\int \frac{1}{(x-2)^{\frac{4}{3}}}dx = \int (x-2)^{-\frac{4}{3}}dx = -3(x-2)^{-\frac{1}{3}} + C.$$

Entonces tenemos que,

$$\int_1^3 \frac{1}{(x-2)^{\frac{4}{3}}}\,dx = \int_1^2 \frac{1}{(x-2)^{\frac{4}{3}}}dx + \int_2^3 \frac{1}{(x-2)^{\frac{4}{3}}}\,dx.$$

Pero la integral impropia

$$\int_1^2 \frac{1}{(x-2)^{\frac{4}{3}}}\,dx$$

es divergente (¡*verifíquelo*!), luego la integral $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{(x-2)^{\frac{4}{3}}}\,dx$ es divergente.

c) La integral $\displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{x}dx$ no es impropia. (*¿Por qué?*).

Ejercicios

En cada uno de los problemas determine la convergencia o divergencia de la integral impropia correspondiente.

1. $\displaystyle\int_0^{\infty} z^2e^{-2z}\,dz.$
2. $\displaystyle\int_1^{e} \frac{1}{y^2-1}\,dy.$
3. $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-y^2}\,dy.$
4. $\displaystyle\int_{0^+}^{1} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\,dx.$
5. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{z}{\sqrt{z^4+1}}\,dz.$
6. $\displaystyle\int_e^{\infty} \frac{1}{y^2-1}\,dy.$
7. $\displaystyle\int_{0^+}^{1^-} \frac{\ln(z)}{1-z}\,dz.$
8. $\displaystyle\int_1^{2} \frac{1}{\sqrt[6]{y-1}}\,dy.$
9. $\displaystyle\int_{0^+}^{1^-} \frac{1}{\sqrt{w}\ln(w)}\,dw.$
10. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{e^x}}\,dx.$
11. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{z^3+1}}\,dz.$
12. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{y}}}{\sqrt{y}}\,dy.$
13. $\displaystyle\int_{0^+}^{1^-} \frac{1}{v(\ln(v))^r}\,dv.$
14. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1-s^2}{(s^2+1)^2}\,ds.$

3.2. Sucesiones numéricas

Definición 3.14 (**Sucesión**). Llamaremos sucesión numérica a la imagen de una función

$$f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$$
$$n\to f(n)=a_n.$$

El número $f(n)=a_n$ se denomina n-ésimo término de la sucesión y la sucesión se puede representar por $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n,\cdots$. En adelante denotaremos las sucesiones por $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Ejemplos 3.15. Consideremos las siguientes sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1.- $1,2,3,4,5,\cdots$. En este caso, $a_1=1$, $a_2=2$, $a_3=3$, $a_4=4$. Por lo tanto $a_n=n$. No es difícil convencerse de que la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está tendiendo a infinito cuando n tiende a infinito. Abusando de la notación para límite de funciones estudiado en el curso de Cálculo I, podemos expresar lo anterior escribiendo

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} n=\infty.$$

2.- $f(n) = \dfrac{n}{n+2} = a_n$. En este caso, $a_1 = \frac{1}{3}$, $a_2 = \frac{2}{4}$, $a_3 = \frac{3}{5}$, $a_4 = \frac{4}{6}$, $a_5 = \frac{5}{7}, \cdots$. Es claro en este ejemplo que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+2} = 1.$$

3.- $a_n = \dfrac{2n^3+1}{5n^3+3n+2}$. En este caso, utilizando la Regla de L'Hôpital se ve que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^3+1}{5n^3+3n+2} = \frac{2}{5}.$$

4.- $a_n = \dfrac{\sqrt[3]{n^2+n+1}}{\sqrt[2]{2n^2+3n+2}}$. De nuevo, utilizando la Regla de L'Hôpital concluimos que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2+n+1}}{\sqrt[2]{4n^2+3n+2}} = 0.$$

Otra manera de verificar el anterior límite consiste en analizar el comportamiento de la fracción en infinito. Es decir,

$$\frac{\sqrt[3]{n^2+n+1}}{\sqrt[2]{4n^2+3n+2}} \approx \frac{\sqrt[3]{n^2}}{\sqrt[2]{4n^2}} = \frac{n^{\frac{2}{3}}}{2n} = \frac{1}{2n^{\frac{1}{3}}} \to 0.$$

5.- Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dada por $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{7}, -\frac{1}{8}, \cdots$. Esta sucesión oscila alrededor del valor cero. En este caso se observa que $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$. Más aún,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 0.$$

6.- Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dada por

$$-1, \frac{1}{2}, -1, \frac{1}{3}, -1, \frac{1}{4}, -1, \frac{1}{5}, -1, \frac{1}{6}, -1, \frac{1}{7}, -1, \frac{1}{8}, \cdots .$$

Esta sucesión oscila alrededor de los valores cero y -1. Por lo tanto, por la unicidad de los límites se concluye que el límite $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ **no existe**.

DEFINICIÓN 3.16 (**Sucesión convergente**). Diremos que la sucesión numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente, si el límite $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ existe. En caso contrario, diremos que la sucesión numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es divergente.

EJEMPLOS 3.17. Consideremos las siguientes sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1.- $1, 2, 3, 4, 5, \cdots$. Dado que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$, entonces la sucesión es divergente.

2.- $a_n = \dfrac{n}{n+2}$. Como $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+2} = 1$, entonces la sucesión $a_n = \dfrac{n}{n+2}$ converge a 1.

3.- $a_n = \dfrac{n^2+n+1}{e^n} + 2$. Utilizando la Regla de L'Hôpital concluimos que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n+1}{e^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{e^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{e^n} = 0.$$

Por lo tanto, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+n+1}{e^n} + 2\right) = 2$. Entonces, la sucesión $a_n = \dfrac{n^2+n+1}{e^n} + 2$ converge a 2.

4.- Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión dada por

$$-1,\ 0,\ 1,\ -1,\ 0,\ 1,\ -1,\ 0,\ 1,\ -1,\ 0,\ 1,\ -1,\ 0,\ \cdots.$$

Esta sucesión oscila alrededor de -1, 0 y 1. Por lo tanto, por la unicidad de los límites se concluye que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ no existe y en consecuencia la sucesión es divergente.

Definición 3.18 (**Sucesión monótona**). Diremos que la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente, si para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $a_{n+1} \geq a_n$.

En términos de la función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ dada por $f(n) = a_n$, la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente si y sólo si f es una función creciente (ver Figuras 3.2.1 y 3.2.2).

Diremos que la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente, si para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $a_{n+1} \leq a_n$.

En términos de la función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ dada por $f(n) = a_n$, la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente si y sólo si f es una función decreciente (ver Figuras 3.2.3 y 3.2.4).

Diremos que una sucesión es monótona, si es una sucesión creciente o una sucesión decreciente.

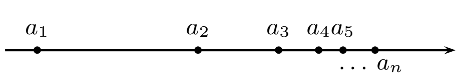


Figura 3.2.1: Sucesión creciente.

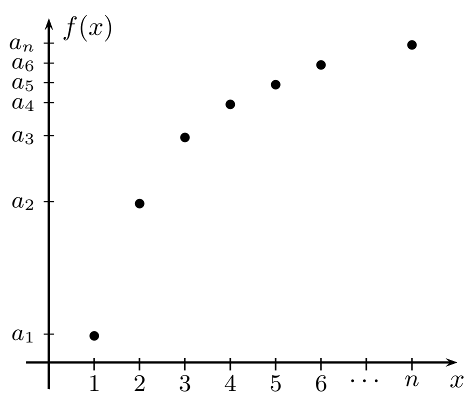


Figura 3.2.2: Sucesión vista como función.

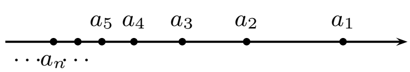


Figura 3.2.3: Sucesión decreciente.

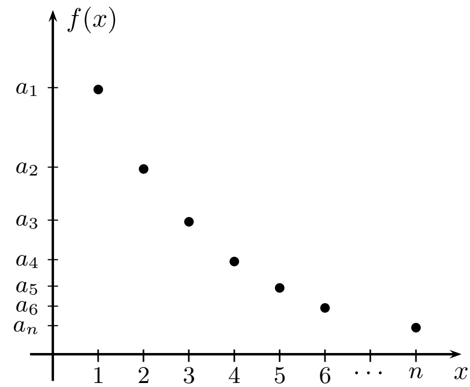


Figura 3.2.4: Sucesión vista como función.

Observación 3.19. Sean f es una función diferenciable para $x \geq 1$ y sea $(a_n)_n$ la sucesión definida como $a_n = f(n)$. Entonces

a. Si f es creciente para $x \geq n_0$ ($f'(x) \geq 0$), entonces la sucesión $(a_n)_n$ es creciente para $n \geq n_0$.

b. Si f es decreciente para $x \geq n_0$ ($f'(x) \leq 0$), entonces la sucesión $(a_n)_n$ es decreciente para $n \geq n_0$.

Ejemplos 3.20. Determinar si las sucesiones dadas son crecientes o decrecientes.

1.- Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión dada por

$$-1,\ 0,\ 1,\ -1,\ 0,\ 1,\ -1,\ 0,\ 1,\ -1,\ 0,\ 1,\ -1,\ 0,\ \cdots .$$

Entonces $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no es monótona (ni crece, ni decrece).

2.- $f(n) = \dfrac{2n}{n^2+1}$, $n \in \mathbb{N}$. Para determinar si $(f(n))_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión monótona vamos a calcular $f'(x)$ y estudiar su signo.

$$f'(x) = \frac{2x(x^2+1) - 2x(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{2(x^2-1)}{(x^2+1)^2} \leq 0 \quad (x^2 \geq 1).$$

Por lo tanto, la sucesión $\left(\dfrac{2n}{n^2+1}\right)_n$ es decreciente hacia cero pues

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n^2+1} = 0.$$

3.- $g(n) = n^2 \ln(n)$, $n \in \mathbb{N}$. Para determinar si $(g(n))_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión monótona vamos a calcular $g'(x)$ y estudiar su signo.

$$g'(x) = 2x\ln(x) + \frac{x^2}{x} = x(2\ln(x) + 1) \geq 0, \quad x \geq 1.$$

Por lo tanto, la sucesión $(n\ln(n))_n$ es creciente. En este caso, la sucesión crece a infinito pues

$$\lim_{n\to\infty} n\ln(n) = \infty.$$

4.- $h(n) = \dfrac{\ln(n)}{n^3}$, $n \in \mathbb{N}$. Para determinar si $(h(n))_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión monótona vamos a calcular $h'(x)$ y estudiar su signo.

$$h'(x) = \frac{x^2 - 3x^2\ln(x)}{x^6} = \frac{1 - 3\ln(x)}{x^4} \leq 0, \quad x \geq 2.$$

Por lo tanto, la sucesión $\left(\dfrac{\ln(n)}{n^3}\right)_n$ es decreciente. En este caso, la sucesión decrece a cero pues

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n)}{n^3} = 0.$$

Observación 3.21 (**Sobre la convergencia de sucesiones monótonas**). Si $(a_n)_n$ es una sucesión creciente, entonces intuitivamente existen sólo dos opciones para el comportamiento de ésta cuando $n \to \infty$. La primera es que la sucesión crezca sin estar acotada superiormente. Es decir, dado $M > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a_n \geq M$. En este caso se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty.$$

La otra opción es que la sucesión esté acotada superiormente. Es decir, $a_n \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. En este caso, es razonable pensar que la sucesión es convergente. Esto es, existe $L \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L.$$

De forma análoga, si $(a_n)_n$ es una sucesión decreciente, entonces existen dos opciones. La primera es que la sucesión decrezca sin estar acotada inferiormente. Es decir, dado $M < 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a_n \leq M$. En este caso se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty.$$

La otra opción es que la sucesión esté acotada inferiormente. Es decir, $a_n \geq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. En este caso, es plausible creer que la sucesión es convergente. Esto es, existe $L \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L.$$

Estas situaciones relativas sólo a **sucesiones monótonas** son precisadas en uno de los axiomas más importantes de los números reales conocido como el *Principio de Completez*.

Principio de Completez.

El Principio de Completez de los números reales establece que toda sucesión $(a_n)_n$ monótona acotada ($|a_n| \leq M$, para todo $n \geq 1$) es convergente. Más concretamente, si $(a_n)_n$ es una sucesión creciente acotada superiormente ($a_n \leq M$, para todo $n \geq 1$) entonces $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ existe (convergente). De forma análoga, si $(a_n)_n$ es una sucesión decreciente acotada inferiormente ($a_n \geq M$, para todo $n \geq 1$) entonces $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ existe (convergente).

Ejemplo 3.22. Consideremos la sucesión definida de manera recursiva. Sea $a_1 = 2$ y $a_{n+1} = \dfrac{2a_n}{a_n+1}$. Primero observemos tomando algunos términos que $a_n \geq 1$ para $n \geq 1$. En efecto,

$$a_2 = \frac{4}{3}, \quad a_3 = \frac{8}{7}, \quad a_4 = \frac{16}{15}, \quad a_5 = \frac{32}{31}, \quad a_6 = \frac{64}{63}, \quad \cdots .$$

Además, $a_{n+1} - 1 = \dfrac{a_n - 1}{a_n + 1}$. Esto significa que si $a_n \geq 1$, entonces $a_{n+1} \geq 1$. Dado que el primer término es positivo, entonces $a_n \geq 1$ para $n \geq 1$ (Principio de Inducción Matemática). Veamos que $(a_n)_n$ es decreciente. Para ello verifiquemos que $a_{n+1} - a_n \leq 0$. La conclusión se sigue de que $a_n \geq 1$ y del siguiente estimativo

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2a_n}{a_n+1} - a_n = \frac{a_n - a_n^2}{a_n+1} = \frac{a_n(1-a_n)}{a_n+1} \leq 0.$$

Dado que la sucesión es decreciente y acotada inferiormente, entonces del Principio de Completez se concluye que $(a_n)_n$ es convergente. Es decir, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$. En consecuencia, de la definición de la sucesión se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2a_n}{a_n+1}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \frac{2\alpha}{\alpha+1} \quad \Leftrightarrow \quad 1 = \frac{2}{\alpha+1} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 1.$$

En otras palabras, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

Ejercicios

1.- Determine la convergencia de cada una de las sucesiones dadas calculando el límite, si existe. En los ejercicios 3, 4 y 5, encuentre el término n-ésimo a_n. Diga cuales son crecientes o decrecientes.

a) $1, -1, -1, 1, -1, -1, 1, \cdots.$

b) $-1, \dfrac{2}{3}, -\dfrac{3}{5}, \dfrac{4}{7}, -\dfrac{5}{9}, \cdots.$

c) $1, -\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{5}, -\dfrac{1}{6}, -\dfrac{1}{7}, \cdots.$

d) $1, \dfrac{1}{1-\frac{1}{2}}, \dfrac{1}{2-\frac{1}{2}}, \dfrac{1}{3-\frac{1}{3}}, \dfrac{1}{4-\frac{1}{4}}, \cdots.$

e) $1, \dfrac{1}{1-\frac{1}{2}}, \dfrac{1}{1-\frac{2}{3}}, \dfrac{1}{1-\frac{3}{4}}, \dfrac{1}{1-\frac{4}{5}}, \cdots.$

f) $a_n = \dfrac{\sqrt[3]{n^2+2n+3}}{\sqrt{4n^3+2n^2+3}}.$

g) $b_n = \left(\dfrac{1}{n+1}\right)^{1/n^2}.$

h) $a_n = \dfrac{\cos(n\pi)}{2n+1}.$

i) $b_n = \left(\dfrac{n+1}{n+2}\right)^{n}.$

j) $a_n = \dfrac{\ln(2n^2+1)}{n^4}.$

k) $a_n = \left(1+\dfrac{2}{n^2}\right)^{3/n}.$

l) $b_n = \left(\dfrac{n^2+1}{n^2+2}\right)^{n^2}.$

2.- Considere las siguientes sucesiones definidas de forma recursiva. Encuentre los primeros 10 términos. Si es posible determine el límite. Muestre que las sucesiones son monótonas. Suponga la convergencia de cada una de las sucesiones y calcule el límite.

a) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 1 + \dfrac{a_n}{2}.$

b) $b_1 = 2, \quad b_{n+1} = \dfrac{b_n}{2} + \dfrac{1}{b_n}.$

c) $u_1 = \sqrt{3}, \quad u_{n+1}^2 = u_n + 3.$

d) $a_1 = \sqrt{k}, \quad a_{n+1}^2 = k + a_n, \quad k > 1.$

3.3. Series numéricas

La paradoja de Zenón. Un corredor desea ir de una ciudad ubicada en el punto A hasta otra ciudad ubicada en el punto B, haciéndolo a una velocidad constante. Notemos que para cubrir la distancia entre las ciudades, el corredor debe primero recorrer la mitad del trayecto. Más aún, para arribar al punto B debe primero recorrer la mitad de la mitad restante, y así sucesivamente. Dado que la distancia es finita y el corredor lleva una velocidad constante, entonces debe arribar al punto B, en un tiempo finito. Sin embargo, aparentemente el corredor nunca alcanzará el punto B dado que siempre debe recorrer la mitad de cierta distancia (Paradoja de Zenón). Con el fin de interpretar matemáticamente esta situación es necesario comprender que existe un proceso de **límite** asociado con dicha paradoja. Supongamos que la distancia entre A y B es 1. ($|AB| = 1$).

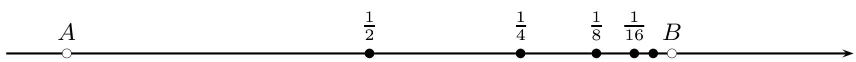


Figura 3.3.1: Representación gráfica de la paradoja de Zenón.

Si "sumamos" todas las mitades que el corredor debe recorrer el resultado final debe ser $S = 1$. Es decir,

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \cdots = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots = 1.$$

Para interpretar correctamente la anterior **"suma infinita"**, definamos la siguiente sucesión de números reales.

$$\begin{aligned}
S_1 &= \frac{1}{2} \\
S_2 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} \\
S_3 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} \\
&\vdots \\
S_n &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \cdots + \frac{1}{2^n} \quad (n\text{-ésima suma parcial}).
\end{aligned}$$

Con el fin de determinar el límite de la sucesión $(S_n)_n$ realicemos el siguiente cálculo

$$\begin{aligned}
S_n - \frac{1}{2}S_n &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) \\
\frac{1}{2}S_n &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n} - \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}}\right) \\
\frac{1}{2}S_n &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right).
\end{aligned}$$

En otras palabras, $S_n = 1 - \dfrac{1}{2^n}$. Más aún, si denotamos con S al límite $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$, tendremos que

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 1 - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n} = 1, \quad \text{pues} \quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n} = 0.$$

Este hecho nos permite interpretar la "suma infinita"

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots = 1$$

como equivalente al límite

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = 1.$$

Definición 3.23 (**Serie infinita**). Dada una sucesión de números reales $(a_n)_n$, llamaremos **serie infinita** asociada con $(a_n)_n$ a la sucesión $(S_n)_n$ definida como,

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

$(S_n)_n$ se conoce como sucesión de sumas parciales. En adelante denotaremos la serie infinita asociada con $(a_n)_n$ por

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum a_n.$$

Diremos que la serie infinita $\sum a_n$ es convergente con suma S si y sólo si $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$. Si $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ no existe, diremos que la serie $\sum a_n$ es divergente.

Ejemplos 3.24. **1.-** De acuerdo con la discusión inicial, la serie

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots$$

converge con suma $S = 1$ dado que

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 1.$$

2.- Consideremos la serie asociada con la sucesión $(n)_n$. Esto es, la serie

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n + \cdots .$$

Vamos a ver que esta serie es divergente. En efecto, la n-ésima suma parcial S_n viene dada por $S_n = 1 + 2 + 4 + 5 + \cdots + n$ y además

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n) = \lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2} = \infty.$$

3.- Consideremos la serie asociada con la sucesión

$$1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ \cdots .$$

En este caso la serie se puede escribir como

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots + 1 - 1 + \cdots .$$

Recordemos que para estudiar la convergencia o divergencia de una serie tenemos que estudiar la convergencia o divergencia de la sucesión de sumas parciales $(S_n)_n$. En este caso tenemos que

$$S_1 = 1, \quad S_2 = 0, \quad S_3 = 1 - 1 + 1 = 1, \quad S_4 = 0, \quad \cdots .$$

Es decir, $S_n = 0$ para n par y $S_n = 1$ para n impar. Por lo tanto, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ no existe, y en consecuencia, la serie dada diverge.

4.- Consideremos la serie asociada con la sucesión

$$1,\ 0,\ -1,\ 1,\ 0,\ -1,\ 1,\ 0,\ -1,\ \cdots ,$$

lo que es equivalente a la serie

$$1 + 0 - 1 + 1 + 0 - 1 + 1 + 0 - 1 + 1 + 0 - 1 + \cdots + 1 + 0 - 1 + \cdots .$$

Estudiemos la convergencia o divergencia de la sucesión de sumas parciales $(S_n)_n$. En este caso tenemos que

$$S_1 = 1,\ S_2 = 1 + 0 = 1,\ S_3 = 1 + 0 - 1 = 0,\ S_4 = 1,\ S_5 = 1,\ S_6 = 0,\ \cdots .$$

Es claro que $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ no existe, y en consecuencia la serie es divergente.

5.- Serie geométrica.

Abordaremos ahora el análisis de la convergencia o divergencia de una de las series más importantes en este curso, denominada serie geométrica.

Llamaremos **serie geométrica** de razón r a la serie infinita definida como

$$1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} r^n$$

Vamos a establecer para $r \in \mathbb{R}$ que la serie geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n$$

converge si y sólo si $|r| < 1$.

La primera observación es que para $r = 1$ la serie geométrica

$$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \cdots$$

es divergente. En efecto,

$$S_1 = 1,\ S_2 = 1+1 = 2,\ S_3 = 1+1+1 = 3,\ \cdots,\ S_n = (1+1+\cdots+1) = n.$$

Como observamos en uno de los ejemplos anteriores, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$.

Veamos ahora para $r = -1$ que la serie geométrica

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$

también es divergente. En este caso,

$$S_1 = 1,\ S_2 = 1-1 = 0,\ S_3 = 1-1+1 = 1,\ S_4 = 0,\ S_5 = 1,\ S_6 = 0,\ \cdots.$$

De nuevo como observamos en uno de los ejemplos, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ no existe.

Supongamos que $r \neq 1$. Entonces observemos que

$$\begin{aligned} S_n &= 1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^{n-1} \\ rS_n &= r(1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^{n-1}) = r + r^2 + r^3 + \cdots + r^n. \end{aligned}$$

Por lo tanto tenemos que

$$\begin{aligned} S_n - rS_n &= 1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^{n-1} - (r + r^2 + r^3 + \cdots + r^n) \\ (1-r)S_n &= 1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^{n-1} - r - r^2 - r^3 - \cdots - r^n \\ (1-r)S_n &= 1 - r^n. \end{aligned}$$

En otras palabras,

$$S_n = \frac{1-r^n}{1-r}.$$

Como sabemos del curso de Cálculo I,

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} 0, & |r| < 1, \\ \infty, & r > 1, \\ \text{no existe}, & r < -1. \end{cases}$$

Por lo tanto, para $r \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ existe si y solo si $|r| < 1$. Más aún,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1-r^{n+1}}{1-r}\right) = \frac{1}{1-r}, \qquad |r| < 1.$$

En resumen, la ***serie geométrica*** de razón r converge si y sólo si $|r| < 1$. Más aún,

$$1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}, \quad |r| < 1.$$

Resta decir que la **serie geométrica** de razón r diverge si y sólo si $|r| \geq 1$.

Observemos que si la serie geométrica inicia con $n = 1$, entonces la suma se obtiene de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} r^n = r + r^2 + r^3 + \cdots + r^n + \cdots &= r(1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^n + \cdots) \\ &= r\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{r}{1-r}, \quad |r| < 1.\end{aligned}$$

Así que las series $\sum \left(\frac{1}{3}\right)^n$ y $\sum \left(-\frac{4}{7}\right)^n$ son convergentes. De forma similar se tiene que las series siguientes $\sum \left(\frac{5}{3}\right)^n$ y $\sum \left(-\frac{\pi}{2}\right)^n$ son divergentes.

6.- Serie Telescópica

Diremos que la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ es una serie **telescópica** cuando el término n-ésimo a_n tiene la forma $a_n = b_n - b_{n+1}$. Se puede ver directamente que la convergencia de una serie telescópica depende de la convergencia de la sucesión b_n. En efecto, consideremos la sucesión de sumas parciales $(S_n)_n$,

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = (b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + \cdots + (b_n - b_{n+1}) = (b_1 - b_{n+1}).$$

Por lo tanto, la serie telescópica $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(b_n - b_{n+1})$ converge si y sólo si $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$. Más aún,

$$\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - b_{n+1}) = \lim_{n\to\infty} S_n = b_1 - \lim_{n\to\infty} b_{n+1} = b_1 - B.$$

Para ejemplificar lo anterior consideremos las siguientes series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} \qquad \text{y} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left[n^{1/3} - (n+1)^{1/3}\right].$$

En el primer caso, utilizando fracciones parciales tenemos que la serie es telescópica. En efecto,

$$\frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right] = \frac{1}{2}(b_n - b_{n+1}),$$

donde $b_n = \dfrac{1}{2n-1}$. Por lo tanto,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right] = \frac{1}{2}\left[1 - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}\right] = \frac{1}{2}.$$

En el segundo caso, dado que $\lim_{n\to\infty} n^{1/3} = \infty$, entonces la serie telescópica

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[n^{1/3} - (n+1)^{1/3}\right]$$

es divergente.

3.3.1. Propiedades algebraicas de las series. Recordemos que la convergencia y divergencia de una serie se definen a través de la convergencia y divergencia de la sucesión de sumas parciales asociadas a la serie dada. De otro lado, sabemos que una sucesión $(a_n)_n$ de número reales se puede pensar como una función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, donde $f(n) = a_n$. Por lo tanto, es posible sumar series y multiplicar series por escalares. Más aún,

Teorema 3.25 (**Álgebra de series**).

1.- **Linealidad**. *Si las series $\sum a_n$ y $\sum b_n$ son convergentes con sumas A y B respectivamente, entonces para cada escalar real α, la serie $\sum(a_n + \alpha b_n)$ es convergente y tiene suma*

$$\sum(a_n + \alpha b_n) = A + \alpha B.$$

2.- **Convergente + Divergente**. *Si la serie $\sum a_n$ es convergente y la serie $\sum b_n$ es divergente, entonces la serie $\sum(a_n + b_n)$ es divergente.*

3.- **Divergente + Divergente**. *Si las series $\sum a_n$ y $\sum b_n$ son divergentes, entonces la serie $\sum(a_n + b_n)$ puede* **ser convergente o divergente**.

Demostración. 1.- Supongamos que las series $\sum a_n$ y $\sum b_n$ son convergentes con sumas A y B respectivamente. Entonces, si S_n denota la sucesión de sumas parciales de la serie $\sum a_n$ y $\tilde{S}_n$ denota la sucesión de sumas parciales de la serie $\sum b_n$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} S_n = A \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} \tilde{S}_n = B.$$

Más aún, la sucesión de sumas parciales de la serie $\sum(a_n + \alpha b_n)$ es $\mathcal{S}_n = S_n + \alpha\tilde{S}_n$. De la propiedad de linealidad de los límites tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{S}_n = \lim_{n\to\infty} S_n + \alpha\tilde{S}_n = A + \alpha B.$$

Es decir que la serie $\sum(a_n + \alpha b_n)$ es convergente y tiene suma

$$\sum(a_n + \alpha b_n) = A + \alpha B.$$

2.- Supongamos que la serie $\sum a_n$ es convergente y la serie $\sum b_n$ es divergente. Supongamos que la serie $\sum(a_n + b_n)$ fuese convergente. Entonces por el caso anterior, la serie

$$\sum[(a_n + b_n) - a_n] = \sum b_n$$

seria convergente. Pero por hipótesis sabemos que la serie $\sum b_n$ es divergente. **Esto es una contradicción**. En otras palabras, lo supuesto es falso. En consecuencia la serie $\sum(a_n + b_n)$ **¡debe ser divergente!**

3.- Note que si la serie $\sum a_n$ es divergente, entonces la serie $\sum(a_n - a_n)$ siempre es convergente pues da la **¡serie nula!** Note también, que la serie $\sum a_n + \sum a_n$ es divergente.

EJEMPLOS 3.26. 1.- La serie

$$\sum \left[3\left(\frac{2}{3}\right)^n - 4\left(\frac{5}{7}\right)^n\right],$$

es convergente pues las series $\sum\left(\frac{2}{3}\right)^n$ y $\sum\left(\frac{5}{7}\right)^n$ son convergentes dado que son series geométricas con razón menor que 1.

2.- La serie

$$\sum \left[3\left(\frac{4}{9}\right)^n - 4n\right],$$

es divergente pues es la suma de la serie geométrica convergente $\sum 3\left(\dfrac{4}{9}\right)^n$ y la serie divergente $\sum 4n$ (ver ejemplo arriba).

Ejercicios

Verifique las igualdades indicadas.

1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4^n} + \left(-\frac{2}{5}\right)^n\right) = \frac{43}{21}$.

2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n} + \left(\frac{3}{5}\right)^n\right) = \frac{9}{2}$.

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)(n+3)} = \frac{1}{3}$.

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = 1$.

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt[5]{2n+1}} - \frac{1}{\sqrt[5]{2n+3}}\right) = \frac{1}{\sqrt[5]{3}}$.

3.3.2. Criterio de la divergencia. Recordemos que la serie $\sum a_n$ converge a la suma S si y sólo si

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S,$$

donde $(S_n)_n$ es la sucesión de sumas parciales. Entonces intuitivamente es necesario que el término n-ésimo a_n de la serie cada vez sea más pequeño. En otras palabras, a_n cada vez debe "sumar menos" para que la serie pueda converger. Este hecho se puede apreciar en el siguiente resultado.

TEOREMA 3.27. *Si la serie* $\sum a_n$ *converge, entonces* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0.$

Demostración. Por hipótesis tenemos $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$. Además,

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n = S_{n-1} + a_n.$$

Es decir, $a_n = S_n - S_{n-1}$. En consecuencia,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0. \qquad \square$$

Este importante resultado tiene una consecuencia relevante en el análisis de la **divergencia** de una serie pues la proposición $P \Rightarrow Q$ es equivalente a la proposición $\sim Q \Rightarrow \sim P$, donde $\sim R$ significa la negación de la proposición R. En palabras, "P implica Q es equivalente a que la negación de Q implica la negación de P". Utilizando este hecho se tiene el siguiente resultado conocido como **criterio de la divergencia**.

COROLARIO 3.28 (**Criterio de la divergencia**). *Si* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$ *o si* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ *no existe, entonces la serie* $\sum a_n$ *diverge.*

EJEMPLOS 3.29. **1.-** Consideremos la serie $\sum \dfrac{n^3}{2n^3 + 2n^2 + 1}$.

Dado que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3}{2n^3 + 2n^2 + 1} = \dfrac{1}{2}$, entonces la serie diverge como consecuencia del *criterio de la divergencia.*

2.- Consideremos la serie $\sum (-1)^n \left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)$.

En este caso, $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n \left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)$ no existe pues el posible valor del límite oscila entre 1 y -1 (**¿por qué?**). De nuevo, la serie diverge como consecuencia del *criterio de la divergencia.*

Observación 3.30. Existen series $\sum a_n$ convergentes y divergentes para las cuales

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Por lo tanto en este caso **no se puede concluir nada sobre la convergencia o divergencia de la serie** $\sum a_n$.

Vamos a ilustrar lo anterior con los siguientes ejemplos:

1.- La serie $\sum \dfrac{1}{n}$ es divergente y $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

2.- La serie $\sum \dfrac{1}{n^2}$ es convergente y por lo tanto, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$.

A continuación vamos a verificar las afirmaciones sobre divergencia y convergencia de las series

$$\sum \frac{1}{n} \qquad \text{y} \qquad \sum \frac{1}{n^2}.$$

Iniciamos considerando el caso de la serie $\sum \dfrac{1}{n}$, denominada serie **armónica**. El análisis que realizaremos se basa en la comparación de la n-ésima suma parcial S_n con la integral impropia asociada con la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $x \geq 1$. Más concretamente,

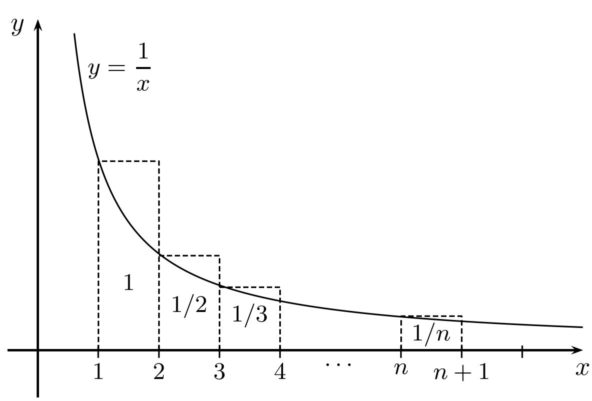


Figura 3.3.2: Gráfica de $y = \dfrac{1}{x}$ para $x \geq 1$.

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \\ &\geq \int_1^{n+1} \frac{1}{x}\, dx \\ &= \ln(x)\Big|_1^{n+1} \\ &= \ln(n+1). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n \geq \lim_{n\to\infty} \ln(n+1) = \infty$, y en consecuencia la serie armónica $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge.

Consideremos ahora la serie $\sum \dfrac{1}{n^2}$, denominada serie **2-Serie**. Efectuando un análisis similar al caso de la serie armónica encontramos que

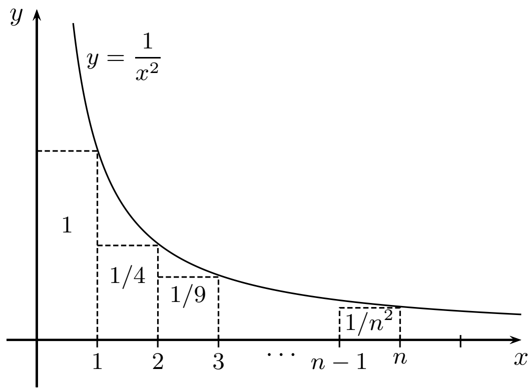


Figura 3.3.3: Gráfica de $y = \dfrac{1}{x^2}$ con $x \geq 1$.

$$
\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \\
&= 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2} \\
&\leq 1 + \int_1^n \frac{1}{x^2}\, dx \\
&= 1 - \left[\frac{1}{x}\right]_1^n \\
&= 2 - \frac{1}{n}.
\end{aligned}
$$

En este caso, tomando límite cuando n tiende a infinito, se tendrá que $\lim\limits_{n\to\infty} S_n \leq 2$. Además, la sucesión $(S_n)_n$ es creciente pues los términos son positivos. Para concluir la convergencia de $(S_n)_n$ debemos recordar el siguiente resultado que es consecuencia del **Principio de Completez de los números reales**.

Una sucesión creciente $(v_n)_n$ es convergente si y sólo si está acotada superiormente. Es decir, si existe un número real M tal que $v_n \leq M$, para todo $n \geq 1$.

Puesto que la sucesión (S_n) es creciente y acotada, entonces converge. En otras palabras, la 2-serie $\sum \dfrac{1}{n^2}$ es convergente.

Es importante señalar que el método utilizado para determinar la convergencia y divergencia de las series en los casos anteriores se denomina criterio de la integral, y será objeto de estudio más adelante.

En particular, hemos observado que:

1.- la convergencia de la integral impropia $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\, dx$ implica la convergencia de la 2-serie $\sum \dfrac{1}{n^2}$. Además,

2.- la divergencia de la integral impropia $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x}\, dx$ implica la divergencia de la 1-serie $\sum \dfrac{1}{n}$ (serie armónica).

3.3.3. Serie de términos positivos. En adelante consideraremos series $\sum a_n$ con $a_n \geq 0$. En este caso la sucesión de sumas parciales $(S_n)_n$ es creciente pues

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n = S_{n-1} + a_n \geq S_{n-1} \quad (a_n \geq 0).$$

En consecuencia, dado que la sucesión $(S_n)_n$ es creciente, entonces el **Principio de Completez** implica que la convergencia de la sucesión $(S_n)_n$ es equivalente a que exista M tal que $S_n \leq M$, para todo $n \geq 1$ (la sucesión $(S_n)_n$ está acotada superiormente). Esto lo podemos resumir en el siguiente resultado.

TEOREMA 3.31. *Supongamos que $a_n \geq 0$ para todo $n \geq 1$. Entonces, La serie de términos positivos $\sum a_n$ converge si y sólo si la sucesión de sumas parciales $(S_n)_n$ está acotada superiormente. Equivalentemente, La serie de términos positivos $\sum a_n$ diverge si y sólo si la sucesión de sumas parciales $(S_n)_n$ es tal que $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$.*

EJEMPLO 3.32. Mostrar que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ converge. Dado que la serie es de términos positivos tenemos que ver si la sucesión de sumas parciales $(S_n)_n$ está acotada superiormente.

$$\begin{aligned}
S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} &= \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \\
&= \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdots n} \\
&\leq \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 2\cdot 2} + \cdots + \frac{1}{2\cdot 2\cdot 2\cdots 2} \\
&\leq \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} \\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k \\
&\leq \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2.
\end{aligned}$$

Es decir, $S_n \leq 2$ para cada $n \geq 1$. Por lo tanto la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ converge.

3.3.4. Criterio de la integral. Como vimos, la divergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ fue consecuencia de la divergencia de la integral impropia $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,dx$. De otro lado, la convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ fue obtenida de la convergencia de la integral impropia

$\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$. En general, vamos a establecer que bajo ciertas condiciones sobre una función continua y positiva $f : [1,\infty) \to \mathbb{R}$ se tiene que

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \textbf{ converge (diverge)} \quad \Longleftrightarrow \quad \int_1^\infty f(x)\,dx \textbf{ converge (diverge)}.$$

Más concretamente,

Teorema 3.33. *Sea $f : [1,\infty) \to \mathbb{R}$ una función continua, positiva y decreciente tal que*

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = 0.$$

*La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ converge (**diverge**) si y sólo si la integral impropia $\displaystyle\int_1^\infty f(x)\,dx$ converge (**diverge**).*

Demostración. La demostración consiste en acotar la n-ésima suma parcial S_n por arriba y por abajo en términos de la integral impropia asociada con f.

Consideremos primero la gráfica de la función f sobre $[a,b]$.

Entonces, tomando los rectángulos por encima de la gráfica de $y = f(x)$ (ver Figura 3.3.4(a)) encontramos que

$$S_n = f(1) + f(2) + \cdots + f(n) \geq \int_1^{n+1} f(x)\,dx.$$

Considerando ahora rectángulos por debajo de la gráfica de $y = f(x)$ (ver Figura 3.3.4(b)) obtenemos que

$$f(2) + \cdots + f(n) \leq \int_1^{n} f(x)\,dx.$$

Por lo tanto, concluimos que

$$S_n = f(1) + f(2) + \cdots + f(n) \leq f(1) + \int_1^{n} f(x)\,dx.$$

En otras palabras hemos mostrado que

$$\int_1^{n+1} f(x)\,dx \leq S_n \leq f(1) + \int_1^{n} f(x)\,dx.$$

De esta desigualdad se concluye que si la integral impropia $\displaystyle\int_1^\infty f(x)\,dx$ converge, entonces la sucesión de sumas parciales $(S_n)_n$ está acotada superiormente, y por lo tanto converge. Más aún, si (S_n) converge, entonces también lo hace la integral impropia $\displaystyle\int_1^\infty f(x)\,dx$. $\square$

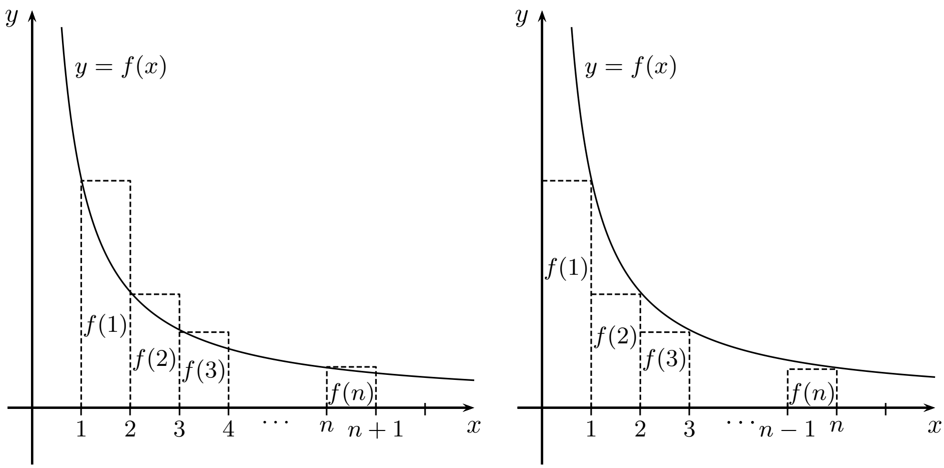


Figura 3.3.4: Gráfica de $y = f(x)$ con $x \geq 1$. (a) Rectángulos por encima. (b) Rectángulos por debajo.

Ejemplos 3.34. **1.-** La p-serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$ converge si y sólo si $p > 1$. Por lo tanto, esta serie diverge si y sólo si $p \leq 1$. Para determinar esto, consideremos la función $f(x) = \dfrac{1}{x^p}$ para $x \geq 1$. Note que f es continua, positiva y decreciente. El caso $p = 1$ corresponde a la serie armónica que fue discutido con anterioridad. En este caso, sabemos que la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ es divergente. Supongamos entonces que $p \neq 1$. Por lo tanto,

$$\lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{x^p}\, dx = \lim_{b\to\infty} \left.\frac{1}{(1-p)x^{p-1}}\right|_1^b = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1-p)} \left(\frac{1}{b^{p-1}} - 1\right)$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{1-p}, & p > 1, \\ \infty, & p < 1. \end{cases}$$

Es decir,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \ \text{converge} \Longleftrightarrow \int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\, dx \ \text{converge} \Longleftrightarrow p > 1,$$

lo que necesariamente implica que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \ \text{diverge} \Longleftrightarrow \int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\, dx \ \text{diverge} \Longleftrightarrow p \leq 1.$$

En particular, las series $\sum \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ y $\sum \dfrac{1}{n^{4/5}}$ son divergentes y las series $\sum \dfrac{1}{n^3}$ y $\sum \dfrac{1}{n^{6/5}}$ son convergentes.

2.- La serie $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n(\ln n)^p}$ converge si y sólo si $p > 1$. La serie diverge si y sólo si $p \leq 1$. Para ver esto, consideremos la función $f(x) = \dfrac{1}{x(\ln x)^p}$ para $x \geq 2$. Note que f es continua, positiva y decreciente. Entonces,

$$\lim_{b\to\infty} \int_2^b \frac{1}{x(\ln x)^p}\, dx = \lim_{b\to\infty} \begin{cases} \ln(\ln(x))\Big|_2^b, & p = 1, \\ \dfrac{1}{(1-p)(\ln x)^{p-1}}\Big|_2^b, & p \neq 1. \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \infty, & p \leq 1 \\ \dfrac{1}{(1-p)(\ln 2)^{p-1}}, & p > 1. \end{cases}$$

Es decir,

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p} \text{ converge} \iff \int_2^{\infty} \frac{1}{x(\ln(x))^p}\, dx \text{ converge} \iff p > 1.$$

Equivalentemente tenemos que

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p} \text{ diverge} \iff \int_2^{\infty} \frac{1}{x(\ln(x))^p}\, dx \text{ diverge} \iff p \leq 1.$$

3.- Consideremos la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{3}{(n^2+1)(n^2+4)}$. Vamos a determinar la convergencia de la integral impropia $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{3}{(x^2+1)(x^2+4)}\, dx$. Utilizando fracciones parciales tenemos que

$$\frac{3}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+4}.$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{3}{(x^2+1)(x^2+4)}\, dx &= \lim_{b\to\infty} \int_0^b \frac{3}{(x^2+1)(x^2+4)}\, dx \\ &= \lim_{b\to\infty} \int_0^b \left(\frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+4} \right) dx \\ &= \lim_{b\to\infty} \left(\arctan(x)\Big|_0^b - \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{x}{2}\right)\Big|_0^b \right) \\ &= \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Dado que

$$\lim_{b\to\infty}\left(\arctan(b)-\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{b}{2}\right)\right)=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{4}.$$

Esto implica que la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{3}{(n^2+1)(n^2+4)}$ converge.

Ejercicios

Diga cuales de las series dadas son convergentes, explicando la razón.

1. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{1}{3^n}+\left(-\dfrac{3}{5}\right)^n\right).$

2. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{1}{4^n}-\left(\dfrac{8}{5}\right)^n\right).$

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^{1/3}}\right).$

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{n^{4/5}}+\dfrac{2}{n^{3/2}}\right).$

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{4}{n^3}-\dfrac{5}{4^n}\right).$

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{n^{4/3}}-\dfrac{n^2+1}{3n^2+5}\right).$

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)^n.$

3.3.5. Criterio de comparación. Una estratégia efectiva que nos permite tener una idea clara sobre la convergencia o divergencia de una serie consiste en analizar el comportamiento del término a_n en infinito, con el fin de efectuar una comparación de la serie inicial con una serie de la que conocemos si es convergente o divergente. Por ejemplo, consideremos la serie de términos positivos $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{2n^3+1}$.

Observemos que cuando n tiende a infinito,

$$\frac{n^2}{2n^3+1}\approx\frac{n^2}{2n^3}\approx\frac{1}{2n}.$$

En otras palabras, los términos $\dfrac{n^2}{2n^3+1}$ y $\dfrac{1}{2n}$ son comparables en infinito. Como conclusión de este hecho, la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{2n^3+1}$ **debe ser divergente** puesto que la serie armónica $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ es divergente. Para verificar esto, notemos que para $n\geq 1$, tenemos que $2n^3+1\leq 2n^3+n^3=3n^3$. En consecuencia, obtenemos que

$$\frac{1}{2n^3+1}\geq\frac{1}{3n^3}\quad\Longleftrightarrow\quad\frac{n^2}{2n^3+1}\geq\frac{n^2}{3n^3}=\frac{1}{3n}.$$

Por lo tanto, comparando las sucesiones de sumas parciales tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \frac{j^2}{2j^3+1} \geq \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{3j} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} = \infty.$$

dado que la serie armónica $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ es divergente. En conclusión, la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{2n^3+1}$ también es divergente.

Consideremos ahora la serie de términos positivos $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{2n^5+n^2+1}$. Observemos que en infinito,

$$\frac{n^2}{2n^5+n^2+1} \approx \frac{n^2}{2n^5} \approx \frac{1}{2n^3}.$$

Así que los términos $\dfrac{n^2}{2n^5+n^2+1}$ y $\dfrac{1}{2n^3}$ son comparables en infinito. Por lo tanto, es natural esperar que la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{2n^5+n^2+1}$ **sea convergente** dado que la 3-serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^3}$ es convergente. En efecto, notemos que para $n \geq 1$, tenemos que $n^5+n^2+1 \geq 2n^5$. Más aún,

$$\frac{1}{2n^5+n^2+1} \leq \frac{1}{2n^5} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{n^2}{2n^5+n^2+1} \leq \frac{n^2}{2n^5} = \frac{1}{2n^3}.$$

Por lo tanto, comparando las sucesiones de sumas parciales tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \frac{j^2}{2j^5+j^2+1} \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2j^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^3} \leq M.$$

Dado que la 3-serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^3}$ es convergente. Así podemos concluir que la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{2n^5+n^2+1}$ es convergente puesto que la sucesión de sumas parciales está acotada superiormente.

La estrategia esbozada en estos ejemplos para analizar la convergencia o divergencia de una serie se puede utilizar siempre y cuando podamos comparar los términos n-ésimos de dos series de términos positivo. Más concretamente,

Teorema 3.35. *Supongamos que* $0 \leq a_n \leq b_n$ *para todo* $n \geq 1$. *Entonces,*

1.- Si la serie $\sum b_n$ *converge, entonces la serie* $\sum a_n$ *converge.*

2.- Si la serie $\sum a_n$ *diverge, entonces la serie* $\sum b_n$ *diverge.*

Demostración. Sean S_n y $\tilde{S}_n$ las sumas parciales de las series $\sum a_n$ y $\sum b_n$, respectivamente. Entonces, por hipótesis tenemos que

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = S_n \leq \tilde{S}_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n.$$

Si $\sum b_n$ converge, entonces $S_n \leq \tilde{S}_n \leq M$. Esto implica que la serie $\sum a_n$ converge, pues S_n está acotada superiormente.

Supongamos ahora que la serie $\sum a_n$ diverge, entonces $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$. Por lo tanto,

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{S}_n \geq \lim_{n\to\infty} S_n = \infty.$$

De donde, la serie $\sum b_n$ diverge pues su sucesión de sumas parciales $(\tilde{S}_n)_n$ no está acotada superiormente. □

Observación 3.36. Notemos que la conclusión del teorema anterior sigue siendo válido, si suponemos que $0 \leq a_n \leq b_n$ para todo $n \geq k$.

Ejemplos 3.37. Utilizando la comparación apropiada determinemos la convergencia o divergencia de las series dadas.

1.- $\sum \dfrac{3\sqrt{n}}{5n^2+2n+3}$. Primero observemos que $\dfrac{3\sqrt{n}}{5n^2+2n+3} \approx \dfrac{3}{5n^{3/2}}$ en infinito, y por lo tanto la serie es convergente. En efecto,

$$0 \leq \frac{3\sqrt{n}}{5n^2+2n+3} \leq \frac{3\sqrt{n}}{5n^2} = \frac{3}{5n^{3/2}}.$$

Del criterio de comparación, la serie $\sum \dfrac{3\sqrt{n}}{5n^2+2n+3}$ converge dado que la $\frac{3}{2}$-serie $\sum \dfrac{1}{n^{3/2}}$ converge.

2.- $\sum \dfrac{2n}{(5n+4)3^n}$. Dado que $\dfrac{2n}{5n+4} \approx \dfrac{2}{5}$ en infinito. Entonces $\dfrac{2n}{(5n+4)3^n} \approx \left(\dfrac{2}{5}\right)\dfrac{1}{3^n}$ en infinito. Ahora,

$$\frac{2n}{5n+4} \leq \frac{2n}{5n} = \frac{2}{5} \iff \frac{2n}{(5n+4)3^n} \leq \left(\frac{2}{5}\right)\frac{1}{3^n}.$$

De modo que la serie $\sum \dfrac{2n}{(5n+4)3^n}$ converge pues la serie geométrica con razón $r = \dfrac{1}{3}$, $\sum \dfrac{1}{3^n} = \sum \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ es convergente.

3.- $\sum \dfrac{2n^{1/3}}{3n^{3/4}+1}$. En este caso, $\dfrac{2n^{1/3}}{3n^{3/4}+1} \approx \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{n^{\frac{5}{12}}}\right)$. Más concretamente,

$$\frac{2n^{1/3}}{3n^{3/4}+1} \geq \frac{2n^{1/3}}{3n^{3/4}+n^{3/4}} = \frac{2n^{1/3}}{4n^{3/4}} = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{n^{\frac{5}{12}}}\right).$$

Del criterio de comparación, la serie $\sum \dfrac{2n^{1/3}}{3n^{3/4}+1}$ diverge dado que la $\frac{5}{12}$-serie $\sum \dfrac{1}{n^{\frac{5}{12}}}$ diverge.

4.- Consideremos la sucesión a_n dada por

$$0,\ 1,\ -1,\ 0,\ 1,\ -1,\ \frac{2}{27},\ \frac{2}{81},\ \frac{2}{243},\ \frac{2}{729},\ \cdots.$$

Notemos que

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 1, \quad a_3 = -1, \quad a_4 = 0, \quad a_5 = 1, \quad a_6 = -1,$$
$$a_7 = \frac{2}{3^3}, \quad a_8 = \frac{2}{3^4}, \quad a_9 = \frac{2}{3^5}, \quad a_{10} = \frac{2}{3^7}, \quad \cdots.$$

Entonces para $n \geq 7$ tenemos que

$$a_n = \frac{2}{3^{n-4}} \leq \frac{3}{3^{n-4}} = \frac{1}{3^{n-5}} = b_n.$$

Dado que la serie $\sum b_n$ es una serie geométrica con razón $r = \frac{1}{3}$, entonces converge. Por lo tanto, la serie a_n también es convergente (ver Observación 3.36).

Como hemos visto, el criterio de comparación requiere de la construcción de una serie adicional para realizar el análisis. Con el fin de facilitar la comparación entre las series, vamos a presentar el siguiente resultado en términos de límites.

TEOREMA 3.38 (**Criterio de comparación por paso al límite**). *Supongamos que $a_n \geq 0$ y que $b_n \geq 0$ son tales que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L.$$

1.- Si $L > 0$, entonces ambas series $\sum a_n$ y $\sum b_n$ convergen, o ambas series $\sum a_n$ y $\sum b_n$ divergen.

2.- Si $L = 0$, entonces,

a) si la serie $\sum b_n$ converge, entonces la serie $\sum a_n$ converge;

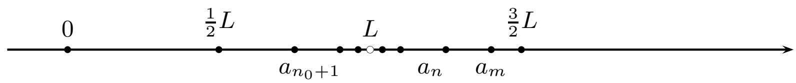
b) si la serie $\sum a_n$ diverge, entonces la serie $\sum b_n$ diverge.

3.- Si $L = \infty$, entonces,

a) si la serie $\sum b_n$ diverge, entonces la serie $\sum a_n$ diverge;

b) si la serie $\sum a_n$ converge, entonces la serie $\sum b_n$ converge.

Demostración. Supongamos que $L \neq 0$. Entonces para n suficientemente grande, los valores de $\dfrac{a_n}{b_n}$ están cerca de L,

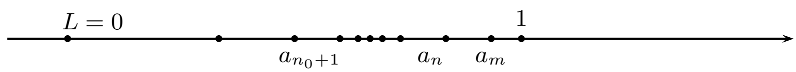


En otras palabras, existe un entero n_0 tal que si $n \geq n_0$ se tiene que

$$\frac{L}{2} \leq \frac{a_n}{b_n} \leq \frac{3L}{2} \iff \frac{L}{2} b_n \leq a_n \leq \frac{3L}{2} b_n.$$

Del **criterio de comparación** concluimos que ambas series convergen o divergen.

Supongamos que $L = 0$. Entonces para n suficientemente grande, los valores de $\dfrac{a_n}{b_n}$ están cerca de $L = 0$,



En otras palabras, existe un entero n_0 tal que si $n \geq n_0$ se tiene que

$$0 \leq \frac{a_n}{b_n} < 1 \iff 0 \leq a_n < b_n.$$

Del **criterio de comparación** concluimos que: si la serie $\sum b_n$ converge, entonces la serie $\sum a_n$ converge. De forma análoga, si la serie $\sum a_n$ diverge, entonces la serie $\sum b_n$ diverge.

Si $L = \infty$, entonces existe un entero n_0 tal que $a_n > b_n$ para $n \geq n_0$. Por lo tanto: si la serie $\sum b_n$ diverge, entonces la serie $\sum a_n$ diverge. De la misma forma, si la serie $\sum a_n$ converge, entonces la serie $\sum b_n$ converge.

Ejemplos 3.39. Determinar la convergencia o divergencia de las series dadas.

1.- $\sum \dfrac{3n^3 + 5n^2 + 1}{2n^4 + 3n^3 + 1}$.

Note que en infinito

$$\frac{3n^3 + 5n^2 + 1}{2n^4 + 3n^3 + 1} \approx \frac{1}{n}.$$

Apliquemos el criterio de comparación por paso al límite tomando

$$\sum a_n = \sum \frac{3n^3 + 5n^2 + 1}{2n^4 + 3n^3 + 1} \quad \text{y} \quad \sum b_n = \sum \frac{1}{n}.$$

Recordemos que esta última serie diverge pues corresponde a la serie armónica. Tomando límite del cociente,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{3n^3 + 5n^2 + 1}{2n^4 + 3n^3 + 1}}{\dfrac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^4 + 5n^3 + n}{2n^4 + 3n^3 + 1} = \frac{3}{2} \neq 0.$$

En consecuencia, la serie $\sum \frac{3n^3+5n^2+1}{2n^4+3n^3+1}$ es divergente.

2.- $\sum \frac{\ln(n)}{2n^2+1}$.

Lo primero que debemos observar en el caso de la función $y = \ln(x)$ es que ésta se puede comparar en infinito con cualquier potencia n^s con $s > 0$. En efecto, utilizando L'Hôpital,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n)}{n^s} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{sn^{s-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{sn^s} = 0.$$

Por tanto, tomando $s = \frac{1}{2}$ tenemos que en infinito

$$\frac{\ln(n)}{2n^2+1} \approx \frac{n^{1/2}}{n^2} = \frac{1}{n^{3/2}}\,.$$

Tomando límite y aplicando L'Hôpital,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{\ln(n)}{2n^2+1}}{\dfrac{1}{n^{3/2}}} &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^{3/2}\ln(n)}{2n^2+1}\\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3}{2}n^{1/2}\ln(n) + \dfrac{1}{n}n^{3/2}}{4n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3}{2}\ln(n)+1}{4n^{1/2}} = 0.\end{aligned}$$

En consecuencia, la serie $\sum \frac{\ln(n)}{2n^2+1}$ converge dado que la serie $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ converge.

3.- $\sum \frac{1}{(2n+1)^{1/2}\ln(n)}$.

Como en el ejemplo anterior $\ln(n) \approx n^{1/2}$. Así en infinito

$$\frac{1}{(2n+1)^{1/2}\ln(n)} \approx \frac{1}{n^{1/2}n^{1/2}} = \frac{1}{n}\,.$$

Tomando límite y aplicando L'Hôpital,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(2n+1)^{1/2}\ln(n)}}{\frac{1}{n}} &= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{(2n+1)^{1/2}\ln(n)}\\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^{1/2}}{(2n+1)^{1/2}}\right)\left(\frac{n^{1/2}}{\ln(n)}\right) = \infty,\end{aligned}$$

Dado que el primer factor converge a $1/\sqrt{2}$ y el segundo converge a $+\infty$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{1}{(2n+1)^{1/2}\ln(n)}}{\dfrac{1}{n}} = \infty,$$

En consecuencia, puesto que la serie $\sum \frac{1}{n}$ diverge, entonces la serie $\sum \frac{1}{(2n+1)^{1/2}\ln(n)}$ también diverge.

4.- $\sum \frac{5n^3+2n^2+1}{(n+1)3^n}$.

La primera observación es que $\frac{5n^3+2n^2+1}{(n+1)3^n} \approx \frac{n^2}{3^n}$ en infinito.

Pero se puede ver directamente que cualquier potencia n^s está dominada por cualquier función exponencial con base positiva. Más concretamente, si $a > 0$, tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^s}{a^n} = 0. \qquad \textbf{(¡Verifíquelo aplicando L'Hôpital } s \textbf{ veces!)}.$$

Por lo tanto, $\frac{5n^3+2n^2+1}{(n+1)3^n} \approx \frac{n^2}{3^n} \approx \frac{2^n}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n$. Tomando límite,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{5n^3+2n^2+1}{(n+1)3^n}}{\left(\frac{2}{3}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{5n^3+2n^2+1}{(n+1)2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{5+2/n+1/n^3}{1+1/n}\frac{n^2}{2^n} = 0.$$

Así que la serie $\sum \frac{5n^3+2n^2+1}{(n+1)3^n}$ converge.

Ejercicios

Determinar la convergencia de las series dadas utilizando el criterio de comparación por paso al límite. En los ejercicios 7, 8 y 9, utilice el criterio de la integral.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt[3]{4n^7+1}}$.
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2+1}{\sqrt[3]{4n^8+1}}$.
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n^3+5n-1)^2}{(4n^2+1)^4}$.
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2n^3+5n-1}}{\sqrt[3]{4n^2+1}}$.
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan(n)}{n\sqrt{n+2}}$.
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2(n)}{\sqrt{n^2+2}}$.
7. $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n^2}$.
8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{1/n}}{n^2+1}$.
9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(2n+1)}{4^n}$.
10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+2n^2+1}{3^n}$.
11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^3+1)}{5^n(n+1)^3}$.
12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n+3^n}$.
13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3^n}{2n+4^n}$.
14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3^n}{n+2^n}$.
15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^3+1)\ln(3n+1)}{5^n}$.
16. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n)\,[\ln(\ln(n))]^3}$.
17. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n)\,[\ln(\ln(n))]^{1/4}}$.

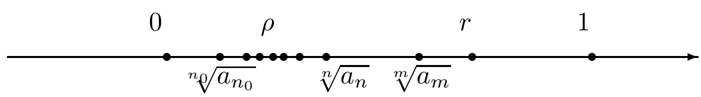
3.3.6. Criterio del cociente y el criterio de la raíz. El criterio de comparación expuesto en la sección anterior tiene como desventaja el hecho de que depende de la construcción de una serie auxiliar. Vamos a presentar dos criterios en los que la convergencia o divergencia sólo depende del término a_n.

TEOREMA 3.40 (**Criterio del cociente y Criterio de la raíz**). *Supongamos que* $a_n \geq 0$ *es tal que*

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \quad (\textit{cociente}) \qquad o \qquad \rho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \quad (\textit{raíz}).$$

1. *Si* $\rho < 1$, *entonces la serie* $\sum a_n$ *converge.*
2. *Si* $\rho > 1$, *entonces la serie* $\sum a_n$ *diverge.*
3. *Si* $\rho = 1$, *entonces el criterio* **no decide**.

Demostración. Supongamos que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \rho < 1$. Tomemos r tal que $\rho < r < 1$. Notemos que los números $\sqrt[n]{a_n}$ están cerca de ρ, pero lejos de r,

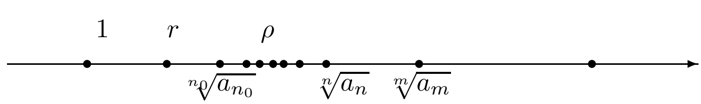


Por lo tanto, existe un entero n_0 tal que si $n \geq n_0$,

$$\sqrt[n]{a_n} < r \qquad \Longleftrightarrow \qquad a_n < r^n.$$

Dado que la serie geométrica $\sum r^n$ converge, entonces la serie $\sum a_n$ converge.

Cuando $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \rho > 1$ tomamos $1 < r < \rho$. De nuevo los números $\sqrt[n]{a_n}$ están cerca de ρ, pero lejos de r,

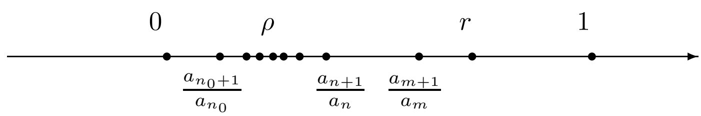


Por tanto, existe un entero n_0 tal que si $n \geq n_0$, entonces

$$\sqrt[n]{a_n} > r \qquad \Longleftrightarrow \qquad a_n > r^n.$$

Dado que la serie geométrica $\sum r^n$ diverge en este caso, entonces la serie $\sum a_n$ también diverge.

Supongamos ahora que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \rho < 1$. Tomemos r tal que $\rho < r < 1$. Notemos que los números $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ están cerca de ρ, pero lejos de r,



Por lo tanto, existe un entero n_0 tal que si $n \geq n_0$,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < r \quad \Longleftrightarrow \quad a_{n+1} < r a_n.$$

En particular, tenemos que

$$a_{n_0+1} < r a_{n_0}, \quad a_{n_0+2} < r a_{n_0+1} < r^2 a_{n_0}, \quad a_{n_0+3} < r a_{n_0+2} < r^3 a_{n_0}, \ \cdots$$

Por lo tanto, $a_{n_0+k} < r^k a_{n_0}$ para $k \geq 1$. En otras palabras, si hacemos $n = n_0 + k$, la desigualdad $a_{n_0+k} < r^k a_{n_0}$ se transforma en

$$a_n < r^{n-n_0} a_{n_0} = \left(\frac{a_{n_0}}{r^{n_0}}\right) r^n, \quad n \geq n_0.$$

Dado que la serie geométrica $\sum r^n$ converge, entonces la serie $\sum a_n$ converge.

El caso $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \rho > 1$ se sigue del mismo análisis (**con desigualdades contrarías**) y se deja como ejercicio.

Para mostrar que el criterio no decide cuando $\rho = 1$, vamos a estudiar dos casos importantes.

Supongamos que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$. En este caso consideremos la serie armónica $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ (divergente) y la 2-serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ (convergente). Entonces, se puede ver directamente que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{1}{n+1}}{\dfrac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \qquad \text{y} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{1}{(n+1)^2}}{\dfrac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1,$$

y también tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1/n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1/n^2} = \lim_{n\to\infty} (\sqrt[n]{1/n})^2 = 1.$$

En consecuencia, en este caso el criterio no decide.

Ejemplos 3.41. Analizar la convergencia o divergencia de las siguientes series de términos positivos

1.- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^3+1}{3^n}$.

En este caso vamos a utilizar el criterio de la raíz. Es decir, analizaremos el siguiente límite

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^3+1}{3^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n^3+1}}{3}.$$

Para calcular el límite resultante, utilizaremos la regla de L'Hôpital. Definamos $y = \sqrt[n]{n^3+1}$. Entonces, $\ln(y) = \dfrac{\ln(n^3+1)}{n}$. Por lo tanto,

$$\lim_{n\to\infty} \ln(y) = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n^3+1)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2}{n^3+1} = 0.$$

Utilizando la continuidad de la función exponencial concluimos que

$$\lim_{n\to\infty} y = e^{\lim\limits_{n\to\infty} \ln(y)} = e^0 = 1.$$

En consecuencia, tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^3+1}{3^n}} = \frac{1}{3} < 1.$$

Del **criterio de la raíz**, la serie es convergente.

Este ejercicio también se puede resolver utilizando el **criterio del cociente**. En este caso,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{(n+1)^3+1}{3^{n+1}}}{\dfrac{n^3+1}{3^n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{(n+1)^3+1}{n^3+1}\right)\left(\frac{3^n}{3^{n+1}}\right) = \frac{1}{3} < 1.$$

Del **criterio del cociente**, la serie es convergente.

2.- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!\ln(n)}{5^n}$.

En este ejercicio es más apropiado utilizar el criterio del cociente debido a la presencia del factorial $n!$, entonces,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{(n+1)!\ln(n+1)}{5^{n+1}}}{\dfrac{n!\ln(n)}{5^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} \frac{5^{n+1}}{5^n} \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)}{5} \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = \infty,$$

pues por la regla de L'Hôpital,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

Así que esta serie es divergente pues el límite no es menor que 1.

3.- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n a^n}{n^2+1}$, con $a > 0$.

Vamos a utilizar el **criterio de la raíz**.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{5^n a^n}{n^2+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{5a}{\sqrt[n]{n^2+1}} = 5a,$$

dado que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2+1} = 1$ (**¡verificarlo!**). Del criterio de la raíz se concluye que la serie converge para valores de a tales que $a < \frac{1}{5}$ y que la serie diverge para valores de a tales que $a > \frac{1}{5}$.

Más aún, si $a = \frac{1}{5}$, la serie converge pues es comparable con la 2-serie. En efecto,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n a^n}{n^2+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

En resumen, la serie converge si y sólo si $a \leq \frac{1}{5}$.

Ejercicios

Determinar la convergencia de las series dadas utilizando el criterio del cociente o el criterio de la raíz (o ambos).

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(450)^n}{n!}$.
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$.
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(2n+1)}{\sqrt{n+2}}$.
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(3n+1)}{n\sqrt{n+2}}$.
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 \ln(3n+1)}{4^n}$.
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{1/n}}{n^2+1}$.
7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(2n+1)}{4^n}$.
8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4+1}{3^n}$.
9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^3+1)\ln(n)}{5^n}$.
10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^3+1)}{4^n(n+1)^3}$.
11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n+3^n}$.
12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2n+4^n}$.
13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n+3^n}$.

3.3.7. Series alternantes. Diremos que una serie es alternante si tiene la forma

$$\sum(-1)^{n+1}a_n, \qquad a_n \geq 0.$$

El análisis de la convergencia de este tipo de serie se basa en el estudio del comportamiento de las sucesiones $(S_{2n})_n$ y $(S_{2n-1})_n$, donde S_n denota la n-ésima suma parcial de la serie. En el caso en que la sucesión $(a_n)_n$ sea decreciente y $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, vamos a mostrar que la sucesión $(S_{2n})_n$ es creciente y la sucesión $(S_{2n-1})_n$ es decreciente. Dado que la sucesión (a_n) es decreciente, entonces

$$\begin{aligned}
S_1 - S_3 &= a_1 - (a_1 - a_2 + a_3) = a_2 - a_3 \geq 0\\
S_3 - S_5 &= a_1 - a_2 + a_3 - (a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5) = a_4 - a_5 \geq 0\\
S_5 - S_7 &= a_6 - a_7 \geq 0\\
&\vdots\\
S_{2n-1} - S_{2n+1} &= a_{2n} - a_{2n+1} \geq 0.
\end{aligned}$$

Es decir, $(S_{2n-1})_n$ es decreciente. De forma análoga, la sucesión de sumas parciales pares $(S_{2n})_n$ es creciente dado que

$$S_{2n+2} - S_{2n} = a_{2n-1} - a_{2n} \geq 0.$$

De otro lado, $S_{2n} \leq S_{2n-1}$. En efecto,

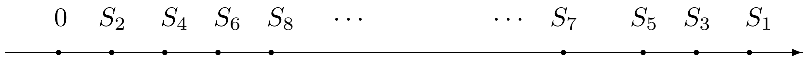
$$\begin{aligned}
&S_1 = a_1, \quad S_2 = a_1 - a_2 \leq a_1 = S_1, \quad S_3 = a_1 - a_2 + a_3 \geq S_2,\\
&S_4 = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 \leq S_3, \quad S_5 = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 \geq S_4.
\end{aligned}$$

En general,

$$\begin{aligned}
S_{2n} &= a_1 - a_2 + a_3 - \cdots - a_{2n-2} + a_{2n-1} - a_{2n}\\
&\leq a_1 - a_2 + a_3 - \cdots - a_{2n-2} + a_{2n-1} = S_{2n-1}.
\end{aligned}$$

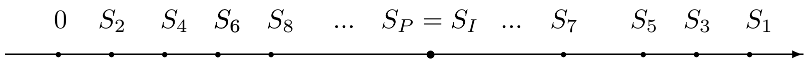
En consecuencia, combinando las anteriores desigualdades obtenemos que $S_{2n} \leq S_{2n-1}$.

Ahora, puesto que la sucesión $(S_{2n})_n$ es creciente y acotada superiormente por S_1, entonces converge a S_P, y como la sucesión $(S_{2n-1})_n$ es decreciente y acotada inferiormente por S_2, entonces converge a S_I.



Más aún, $S_P = S_I$. Esto se sigue de que,

$$S_I - S_P = \lim_{n\to\infty}(S_{2n-1} - S_{2n}) = \lim_{n\to\infty} a_{2n} = 0.$$



Por lo tanto, la serie alternante $\sum(-1)^{n+1}a_n,\ \ a_n \geq 0$ converge. En otras palabras hemos demostrado el siguiente resultado conocido como criterio de Leibniz para series alternantes.

TEOREMA 3.42 (**Criterio de Leibniz**). *Supongamos que $a_n \geq 0$ y que la sucesión $(a_n)_n$ es decreciente y $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Entonces la serie alternante $\sum(-1)^{n+1}a_n$ converge.*

EJEMPLOS 3.43. **1.-** La p-serie alternante $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n^p}$ converge para $p > 0$. Claramente, $a_n = \frac{1}{n^p}$ es decreciente a cero y tiende a cero. Del criterio de Leibniz la serie converge.

2.- Analizar la convergencia de la serie alternante $\sum(-1)^{n+1}\frac{n}{\sqrt{2n^3+1}}$.

Primero observemos que $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{2n^3+1}} = 0$. Ahora mostremos que la sucesión $a_n = \frac{n}{\sqrt{2n^3+1}}$ es decreciente. Para ver esto, consideremos la función $f(x) = \frac{x}{\sqrt{2x^3+1}}$. Entonces derivando,

$$f'(x) = \frac{\sqrt{2x^3+1} - \frac{3x^3}{\sqrt{2x^3+1}}}{2x^3+1} = \frac{1-x^3}{(2x^3+1)^{3/2}} \leq 0, \quad x \geq 1.$$

Del criterio de Leibniz, la serie $\sum(-1)^{n+1}\frac{n}{\sqrt{2n^3+1}}$ converge.

3.- Determinar la convergencia de la serie alternante

$$\sum(-1)^{n+1}\left(\frac{2\sqrt{n}+2}{3\sqrt{n}+1}\right).$$

Mostremos que la sucesión $a_n = \dfrac{2\sqrt{n}+2}{3\sqrt{n}+1}$ es decreciente. En efecto, definamos $f(x) = \dfrac{2\sqrt{x}+2}{3\sqrt{x}+1}$ con $x \geq 1$. Derivando obtenemos que

$$f'(x) = \frac{\dfrac{(3\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}} - \dfrac{3(2\sqrt{x}+2)}{2\sqrt{x}}}{(3\sqrt{x}+1)^2} = \frac{-2}{\sqrt{x}(3\sqrt{x}+1)^2} \leq 0.$$

Es decir, la sucesión $a_n = \dfrac{3\sqrt{n}+2}{2\sqrt{n}+1}$ es decreciente. Resta verificar que esta sucesión decrece hacia cero. Utilizando la regla de L'Hôpital concluimos que

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2\sqrt{n}+2}{3\sqrt{n}+1}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{3}{2\sqrt{n}}} = \frac{2}{3} \neq 0.$$

A pesar de que esta serie es alternante y el término a_n decrece, la serie no es convergente pues el término a_n no tiende a cero. En realidad esto fue lo que primero debimos haber analizado (**criterio de la divergencia**).

Ejercicios

Determinar si las series alternantes dadas convergen o divergen.

1. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{2}{n!}$.
2. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{\ln(n)}{\sqrt{n}}$.
3. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{\ln(n)}{n^2+1}$.
4. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{n^2}{n^3+1}$.
5. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{n}{3^n}$.
6. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{n!}{(2n)!}$.
7. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{\sqrt[n]{n}}$.
8. $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{n^2+1}{\ln(n)}$.
9. $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{n^2+1}{e^n}$.
10. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{3^n}{n!}$.

3.3.8. Convergencia absoluta. Recordemos que la serie **armónica** $\sum \frac{1}{n}$ es divergente y que la serie **alternante armónica** $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ es convergente. Más aún, notemos que

$$\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right| = \frac{1}{n}.$$

Este simple hecho muestra que la serie $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge, pero la serie en valor absoluto

$$\sum \left|\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right| = \sum \frac{1}{n}$$

es divergente. Esto nos conduce a la siguiente definición.

DEFINICIÓN 3.44 (**Convergencia absoluta y convergencia condicional**). Diremos que la serie $\sum a_n$ **converge absolutamente**, si la serie de los valores absolutos $\sum |a_n|$ converge. Diremos que la serie $\sum a_n$ **converge condicionalmente**, si la serie $\sum a_n$ es convergente y la serie de los valores absolutos $\sum |a_n|$ es divergente.

De la discusión anterior, la serie **alternante armónica** $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ es condicionalmente convergente pues es convergente y la serie de los valores absolutos $\sum \left|\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right| = \sum \frac{1}{n}$ es divergente.

La ventaja de considerar la convergencia absoluta radica en que la serie $\sum a_n$ es una serie de términos positivos para las cuales tenemos algunos criterios. Además, la importancia de estudiar la convergencia de los valores absolutos de una serie es que la convergencia de ésta última implica la convergencia de la serie misma. Más concretamente:

TEOREMA 3.45. *Si la serie $\sum |a_n|$ es convergente, entonces la serie $\sum a_n$ también es convergente.*

Demostración. Recordemos que la suma de una serie convergente y una serie divergente es una serie divergente. Vamos a realizar una demostración por contradicción. Supongamos ahora que la serie $\sum a_n$ es divergente. Consideremos $b_n = |a_n| - a_n \geq 0$. Por lo tanto, la serie $\sum b_n$ es una serie de términos positivos. Más aún,

$$b_n = |a_n| - a_n \leq |a_n| + |a_n| = 2|a_n|.$$

Del criterio de comparación concluimos que la serie $\sum b_n$ es convergente. Como estamos suponiendo que la serie $\sum a_n$ es divergente, entonces la serie $\sum b_n + \sum a_n$ es divergente. En consecuencia, la serie $\sum |a_n|$ resultaría ser divergente pues

$$\sum b_n + \sum a_n = \sum (b_n + a_n) = \sum (|a_n| - a_n + a_n) = \sum |a_n|.$$

Esto es una **contradicción**. En consecuencia lo supuesto es **falso**. Por lo tanto, la serie $\sum a_n$ es en realidad convergente.

EJEMPLOS 3.46. Determinar la convergencia absoluta, convergencia condicional, convergencia o divergencia de la series dadas.

1. $\sum \dfrac{\cos(2n\pi/5)}{3n^3+1}$.
2. $\sum \dfrac{(-1)^{n+1}}{2\sqrt[3]{n^4+1}}$.
3. $\sum \dfrac{(-1)^{n+1}}{2\sqrt[5]{3n^4+2n^2+1}}$.
4. $\sum (-1)^{n+1}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$.

Dado que la serie $\sum |a_n|$ es una serie de términos positivos o nulos, entonces podemos utilizar el criterio de la raíz y el criterio del cociente con el fin de analizar la convergencia de la serie $\sum a_n$.

TEOREMA 3.47 (**Criterio del cociente y criterio de la raíz**). *Consideremos la serie $\sum a_n$ y supongamos que a_n es tal que*

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \quad (\textit{cociente}) \qquad o \qquad \rho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \quad (\textit{raíz n-ésima}).$$

1.- Si $\rho < 1$, entonces la serie $\sum |a_n|$ converge, y por lo tanto, $\sum a_n$ también converge.
2.- Si $\rho > 1$, entonces la serie $\sum a_n$ diverge.
3.- Si $\rho = 1$, entonces el criterio **no decide**.

EJEMPLOS 3.48. **I.**- Determinar la convergencia o divergencia de las series dadas. ¿Es la convergencia absoluta o condicional?

1.- $\sum \dfrac{(-1)^{n+1}}{2\sqrt[3]{n^4+1}}$.

En este ejemplo verifique que la convergencia es absoluta, comparando con la serie $\sum \dfrac{1}{\sqrt[3]{n^4}}$.

2.- $\sum \dfrac{(-1)^{n+1}}{2\sqrt[5]{3n^4+2n^2+1}}$.

En este ejemplo verifique que la convergencia es condicional, utilizando el criterio de Leibniz.

3.- $\sum(-1)^{n+1}\dfrac{(2n^2+1)}{n!2^n}$.

En este ejemplo verifique que la convergencia es absoluta, vía el criterio del cociente.

4.- $\sum(-1)^{n+1}\dfrac{n!}{n^3 5^n}$.

En este ejemplo verifique que la serie diverge, vía el criterio del cociente.

II.- Encuentre el conjunto de $x \in \mathbb{R}$ para los cuales la serie dada converge, diverge o converge absolutamente.

Solución.

1.- $\sum \dfrac{(n+2)(x+3)^n}{(n^2+1)2^n}$.

En este ejemplo vamos a ver que existe $R \geq 0$ (denominado radio de convergencia) tal que si $|x+3| < R$, entonces la serie converge absolutamente, y si $|x+3| > R$, entonces la serie diverge. En efecto, utilizando el criterio del cociente en valor absoluto,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{(n+1+2)|x+3|^{n+1}}{((n+1)^2+1)2^{n+1}}}{\dfrac{(n+2)|x+3|^n}{(n^2+1)2^n}} &= \lim_{n\to\infty} \frac{|x+3|}{2}\frac{(n^2+1)(n+3)}{((n+1)^2+1)(n+2)} \\
&= \frac{|x+3|}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+1)(n+3)}{((n+1)^2+1)(n+2)} = \frac{|x+3|}{2}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la convergencia absoluta está garantizada si se tiene que $\dfrac{|x+3|}{2} < 1$. Pero observemos que

$$\frac{|x+3|}{2} < 1 \iff |x+3| < 2 \qquad (R = 2).$$

En otras palabras, la serie converge absolutamente (y por tanto converge) en el conjunto

$$I = \{x \in \mathbb{R} : |x+3| < 2\},$$

el cual es un intervalo abierto de centro $x = -3$ y radio $R = 2$. Es decir,

$$I = (-3-2, -3+2) = (-5, -1).$$

De nuevo por el criterio del cociente, la serie diverge para $x \in \mathbb{R}$ tales que $|x+3| > 2$. Es decir, si $x \in (-\infty, -5) \cup (-1, \infty)$. Note que podemos discutir la convergencia en los extremos del intervalo de convergencia absoluta $I = (-5, -1)$.

Extremo $x = -5$. En este caso la serie toma la forma

$$\sum \frac{(n+2)(-5+3)^n}{(n^2+1)2^n} = \sum \frac{(n+2)(-2)^n}{(n^2+1)2^n} = \sum (-1)^n \frac{n+2}{n^2+1}.$$

Esta serie es alternante. Consideremos la función $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+1}$ para $x \geq 1$. Notemos que

$$f'(x) = \frac{1-4x-x^2}{(x^2+1)^2} < 0, \qquad \text{para } x \geq 1.$$

Del criterio de Leibniz para series alternantes, la serie es convergente pues el término n-ésimo tiende a cero.

Extremo $x = -1$. En este caso la serie toma la forma

$$\sum \frac{(n+2)(-1+3)^n}{(n^2+1)2^n} = \sum \frac{(n+2)2^n}{(n^2+1)2^n} = \sum \frac{n+2}{n^2+1}.$$

Esta serie diverge pues es comparable con la serie armónica $\sum \dfrac{1}{n}$.

Observemos que el radio del intervalo $R = 2$ se caracteriza de la siguiente forma

$$\begin{aligned}\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{(n+1+2)}{((n+1)^2+1)2^{n+1}}}{\dfrac{(n+2)}{(n^2+1)2^n}} &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \frac{(n^2+1)(n+3)}{((n+1)^2+1)(n+2)} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{(n^2+1)(n+3)}{((n+1)^2+1)(n+2)} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

2.- $\displaystyle\sum_0^\infty \frac{n!x^n}{(n^3+1)4^n}$. Utilizando el criterio del cociente en valor absoluto,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{(n+1)!|x|^{n+1}}{((n+1)^3+1)4^{n+1}}}{\dfrac{n!|x|^n}{(n^3+1)4^n}} &= \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{4} \frac{(n^2+1)(n+1)!}{((n+1)^3+1)n!} \\ &= \frac{|x|}{4} \lim_{n\to\infty} \frac{(n^3+1)(n+1)}{((n+1)^3+1)} = \frac{|x|}{4}(\infty) = \infty \quad (x \neq 0).\end{aligned}$$

Por lo tanto, la serie converge si y sólo si $x = 0$, pues para $x \neq 0$ se tiene que el límite es mayor que 1. En este caso el radio del intervalo es $R = 0$ y en consecuencia el intervalo $I = \{0\}$.

Como en el ejemplo anterior, el radio del intervalo $R = 0$ se caracteriza de la siguiente forma:

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{(n+1)!}{((n+1)^3+1)4^{n+1}}}{\dfrac{n!}{(n^3+1)4^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4}\frac{(n^3+1)(n+1)!}{((n+1)^3+1)n!}$$

$$= \frac{1}{4}\lim_{n\to\infty} \frac{(n^3+1)(n+1)}{(n+1)^3+1} = \frac{1}{4}(\infty) = \infty.$$

3.- $\sum\limits_{0}^{\infty} \dfrac{(x-3)^n}{n!e^n}$. Utilizando el criterio del cociente en valor absoluto,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{|x-3|^{n+1}}{(n+1)!e^{n+1}}}{\dfrac{|x-3|^n}{n!e^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x-3|}{e}\frac{n!}{(n+1)!}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{|x-3|}{e}\frac{1}{n+1} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad R = 0.$$

Por lo tanto, la serie converge para todo $x \in \mathbb{R}$, pues para $x \in \mathbb{R}$ se tiene convergencia por el criterio del cociente dado que el límite es menor que 1. En este caso el radio del intervalo convergencia es $R = \infty$ y el intervalo de convergencia es $I = (-\infty, \infty) = \mathbb{R}$.

Como en el ejemplo anterior, el radio del intervalo de convergencia $R = \infty$ se caracteriza de la siguiente forma:

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{1}{(n+1)!e^{n+1}}}{\dfrac{1}{n!e^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{e}\frac{n!}{(n+1)!}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{e}\frac{1}{n+1} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad R = \infty.$$

Ejercicios

I.- Determinar si las series dadas convergen absolutamente, convergen condicionalmente o divergen.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\dfrac{2^n}{n!}$.
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-450)^n}{n!}$.
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^n n!}{n^n}$.
4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln(2n+1)}{\sqrt{n+2}}$.
5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln(3n+1)}{n\sqrt{n+2}}$.
6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^3\ln(3n+1)}{4^n}$.

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{1/n}}{n^2+1}$.
8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(2n+1)}{4^n}$.
9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4+1}{3^n}$.

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^3+1)\ln(n)}{5^n}$.
11. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3^n}{2n+4^n}$.
12. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}$.

13. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\ln(n)}{n^2+1}$.
14. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^3+2}{n^4+1}$.
15. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{3^n}$.

16. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$.
17. $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2+1}{\ln(n)}$.
18. $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2+1}{e^n}$.

19. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3^n}{n!}$.
20. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2^n+3n+1}$.

II.- Determine los valores de x, y o z para los cuales las series dada son absolutamente convergentes.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n(x-2)}{n^3+1}$.
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^3+1)\ln(n)(2y-3)}{5^n}$.

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^2(n)(2-5z)}{(n^2+1)5^n}$.
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n(3z+4)}{2n+4^n}$.

3.4. Series de potencias

Llamaremos serie de potencias o **serie de Taylor** alrededor de $x=a$, a una serie de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n = a_0+a_1(x-a)+a_2(x-a)^2+a_3(x-a)^3+\cdots+a_k(x-a)^k+\cdots .$$

Cuando la serie de potencias se desarrolla alrededor de $x=0$ (es decir $a=0$), se tiene que

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_kx^k + \cdots$$

y la llamaremos **serie de Maclaurin**.

Como hemos observado en los ejemplos anteriores, dada una serie de potencias alrededor de $x=a$ de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$, existen $0 \le R \le \infty$ y un intervalo I de la forma

1.- $I = (a - R, a + R)$, cuando $0 < R < \infty$,

2.- $I = \{a\}$, cuando $R = 0$ (en otras palabras la serie sólo converge para $x = a$), o

3.- $I = (-\infty, \infty) = \mathbb{R}$, cuando $R = \infty$,

en donde la serie converge absolutamente. Más aún, la serie diverge en

$$(-\infty, a - R) \bigcup (a + R, \infty).$$

Esta observación se puede resumir en el siguiente resultado.

TEOREMA 3.49. *Dada una serie de potencias o serie de Taylor alrededor de $x = a$*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - a)^n,$$

existe $0 \leq R \leq \infty$ tal que:

1.- la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x - a)^n$ converge absolutamente en el intervalo abierto $I = (a - R, a + R)$, cuando $0 < R < \infty$;

2.- la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x - a)^n$ diverge por fuera del intervalo $[a - R, a + R]$, cuando $0 \leq R < \infty$;

3.- la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x - a)^n$, converge sólo para $x = a$ cuando $R = 0$ (es decir $I = \{a\}$);

4.- la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x - a)^n$, converge absolutamente para todo $x \in (\infty, \infty)$ cuando $R = \infty$.

En adelante, R se denominará radio de convergencia e I se denominará intervalo de convergencia.

EJEMPLOS 3.50. Determine el radio de convergencia y el intervalo de convergencia de la serie dada. Especifique el intervalo de convergencia absoluta y de divergencia. Analice los extremos del intervalo de convergencia absoluta.

1.- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x+2)^n}{\sqrt[3]{n^2+1}}$.

Utilizando el criterio de la raíz n-ésima en valor absoluto,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{(x+2)^n}{\sqrt[3]{n^2+1}}\right|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|x+2|^n}{\sqrt[3]{n^2+1}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x+2|}{\sqrt[n]{\sqrt[3]{n^2+1}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x+2|}{\sqrt[3n]{n^2+1}}.$$

Para calcular el límite $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[3n]{n^2+1}$ de la forma ∞^0 vamos a aplicar la regla de L'Hôpital. Definamos $y = \sqrt[3n]{n^2+1}$. Entonces

$$\ln(y) = \ln(\sqrt[3n]{n^2+1}) = \frac{\ln(n^2+1)}{3n}$$

tiene la forma indeterminada ∞/∞, cuando $n \to \infty$. Entonces,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n^2+1)}{3n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{2n}{n^2+1}}{3} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{3(n^2+1)} = 0.$$

En consecuencia,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[3n]{n^2+1} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} \ln(\sqrt[3n]{n^2+1})} = e^0 = 1.$$

Así que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{(x+2)^n}{\sqrt[3]{n^2+1}}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x+2|}{\sqrt[3n]{n^2+1}} = |x+2|.$$

Por lo tanto, la serie converge absolutamente para los x tales que $|x+2| < 1$. Es decir, el radio de convergencia es $R = 1$ y el intervalo de convergencia absoluta alrededor de $x = -2$ es $I = (-2-1, -2+1) = (-3, -1)$.

Más aún, la serie diverge para $x \in (-\infty, -3) \bigcup (-1, \infty)$. Sólo resta analizar los extremos del intervalo $I = (-3, -2)$.

Extremo $x = -3$. En este caso la serie toma la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3+2)^n}{\sqrt[3]{n^2+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^2+1}}.$$

Aplicando el criterio de Leibniz, la serie alternante $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^2+1}}$ converge pues el término n-ésimo $a_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^2+1}}$ tiende a cero y la sucesión $(a_n)_n$ es decreciente (**¡verificarlo!**).

Extremo $x = -1$. En este caso la serie toma la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1+2)^n}{\sqrt[3]{n^2+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2+1}}.$$

Utilizando comparación con la serie $\sum \dfrac{1}{n^{2/3}}$ se tiene que la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt[3]{n^2+1}}$ es divergente. En consecuencia, el intervalo de convergencia es $U = I \cup \{-3\} = [-3, -1)$.

2.- $\sum \dfrac{(2n^2+1)(x-2)^n}{n3^n}$.

Utilizando el criterio del cociente en valor absoluto,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{(2(n+1)^2+1)|x-2|^{n+1}}{(n+1)3^{n+1}}}{\dfrac{(2n^2+1)|x-2|^n}{n3^n}} &= \lim_{n\to\infty} \frac{|x-2|}{3}\frac{(2(n+1)^2+1)n}{(2n^2+1)(n+1)} \\
&= \frac{|x-2|}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{(2(n+1)^2+1)n}{(2n^2+1)(n+1)} = \frac{|x-2|}{3}.
\end{aligned}$$

En consecuencia, la convergencia absoluta está garantizada si se tiene que $\dfrac{|x-2|}{3} < 1$. Pero observemos que

$$\frac{|x-2|}{3} < 1 \quad \Longleftrightarrow \quad |x-2| < 3 \qquad (R = 3).$$

En otras palabras, la serie converge absolutamente (y por tanto converge) en el conjunto $I = \{x \in \mathbb{R} : |x-2| < 3\}$, el cual es un intervalo abierto de centro $x = 2$ y radio $R = 3$. Es decir, $I = (2-3, 2+3) = (-1, 5)$.

De nuevo por el criterio del cociente, la serie diverge para $x \in \mathbb{R}$ tales que $|x-2| > 3$. Es decir, si $x \in (-\infty, -1) \cup (5, \infty)$. Note que podemos discutir la convergencia en los extremos del intervalo de convergencia absoluta $I = (-1, 5)$.

Extremo $x = 5$. En este caso la serie toma la forma

$$\sum \frac{(2n^2+1)(5-2)^n}{n3^n} = \sum \frac{(2n^2+1)3^n}{n3^n} = \sum \frac{(2n^2+1)}{n}.$$

Esta serie diverge pues $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{(2n^2+1)}{n} = \infty \neq 0$ (**criterio de divergencia**).

Extremo $x = -1$. En este caso la serie toma la forma

$$\sum \frac{(2n^2+1)(-1-2)^n}{n3^n} = \sum \frac{(2n^2+1)(-3)^n}{n3^n} = \sum \frac{(-1)^n(2n^2+1)}{n}.$$

Esta serie diverge pues $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n(2n^2+1)}{n}$ no existe, de nuevo por el (**criterio de divergencia**).

Observemos que el radio del intervalo $R = 3$ se caracteriza de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{(2(n+1)^2+1)}{(n+1)3^{n+1}}}{\dfrac{(2n^2+1)}{n3^n}} &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3}\frac{(2(n+1)^2+1)n}{(2n^2+1)(n+1)} \\
&= \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{(2(n+1)^2+1)n}{(2n^2+1)(n+1)} = \frac{1}{3} \quad \Longleftrightarrow \quad R = 3.
\end{aligned}$$

Ejercicios

Determine el radio y el intervalo de convergencia de la series de potencias dadas. Analice la convergencia en los extremos del intervalo de convergencia.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{5^n x^n}{3n^4+1}$.
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(2n)!x^n}{n^3+1}$.
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^n(x-1)^n}{n!}$.
4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x-3)^n}{(3n^2+1)3^n}$.
5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x+3)^n}{\sqrt[n]{n}}$.
6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n(x-2)^n}{2+3^n}$.
7. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1}\dfrac{(n^2+1)(x+5)^n}{\ln(n)}$.
8. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(3n^3+1)(x-3)^n}{\ln(n)}$.
9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n^3+1)\ln(n)(x+1)^n}{4^n}$.
10. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(n^2+1)(x+4)^n}{e^n}$.

3.4.1. Diferenciabilidad e integrabilidad de series de potencias. Recordemos que dada una serie de potencias $\sum a_n(x-a)^n$, existe $0 \leq R \leq \infty$ tal que la serie converge absolutamente en el intervalo $I = (a-R, a+R)$. Más aún, cuando $0 < R \leq \infty$ podemos definir una función $f : I \to \mathbb{R}$ de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n \\ &= a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + a_3(x-a)^3 + \cdots + a_n(x-a)^n + \cdots . \end{aligned}$$

En primer lugar observemos que $f(a) = a_0$. En un curso de Cálculo Avanzado se puede mostrar que una función f definida en términos de una serie de potencias es diferenciable y f' es de nuevo una serie de potencias con el mismo radio de convergencia de f y de la forma

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-a)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}(x-a)^n, \qquad x \in I.$$

Notemos que $f'(a) = a_1$. Utilizando el mismo argumento, f'' es de nuevo una serie de potencias y por lo tanto es diferenciable, además

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n(x-a)^{n-2}, \qquad x \in I.$$

con $f''(a) = 2a_2 = 2!a_2$.

En resumen, dada $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ con $x \in I$, entonces f es una función infinitamente diferenciable tal que

$$f(a) = a_0,\ f'(a) = a_1,\ f''(a) = 2a_2 = 2!a_2,\ f'''(a) = 3!a_3,\ \cdots,\ f^{(k)}(a) = k!a_k.$$

Es decir, los coeficientes se calculan como $a_k = \dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}$ y la serie de potencias alrededor de $x = a$ tiene en realidad la forma,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

También se puede demostrar que si $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ con $x \in I$, entonces f es integrable sobre cualquier intervalo cerrado $[c,d] \subset I$. Más concretamente,

$$\begin{aligned}\int_c^d f(t)\,dt &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_c^d (t-a)^n\,dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(t-a)^{n+1}}{n+1}\Big|_c^d = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\left[(d-a)^{n+1} - (c-a)^{n+1}\right]}{n+1}.\end{aligned}$$

En particular,

$$\begin{aligned}\int_a^x f(t)\,dt &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_a^x (t-a)^n\,dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(t-a)^{n+1}}{n+1}\Big|_a^x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}.\end{aligned}$$

Observación 3.51. Utilizando las propiedades de diferenciación e integración se pueden obtener nuevas series de potencias. En efecto, recordemos que la serie geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ para $|x| < 1$ define o representa la función $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$. Es decir,

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \qquad x \in (-1,1). \tag{3.3}$$

Entonces, derivando (3.3) obtenemos que

$$\frac{2}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n, \qquad x \in (-1,1).$$

Ahora integrando (3.3)

$$-\ln(1-x) = \int_0^x \frac{1}{1-t}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x t^n\,dt \tag{3.4}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}, \quad x \in (-1,1).$$

Similarmente, reemplazando x por $-x$ en la fórmula (3.4) se tiene que

$$-\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n}, \qquad x \in (-1,1),$$

o equivalentemente,

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}, \qquad x \in (-1,1). \tag{3.5}$$

De otro lado, reemplazando x por $-x^2$ en la serie geométrica obtenemos, para $x \in (-1,1)$, que

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}. \tag{3.6}$$

Integrando la función anterior (3.6) obtenemos, para $x \in (-1,1)$, que

$$\arctan(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^x t^{2n}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}. \tag{3.7}$$

Ejercicios

Encuentre la representación en series de potencia para $f(x)$ y determine el radio de convergencia de la serie. Los problemas están relacionados con la serie geométrica

$$g(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \qquad |x| < 1.$$

1. $f(x) = \dfrac{1}{1-2x}$.
2. $f(x) = \dfrac{1}{1+3x}$.
3. $f(x) = \ln(1+x)$.
4. $f(x) = \dfrac{1}{(5-2x)}$.
5. $f(x) = \dfrac{1}{(1+2x)^2}$.
6. $f(x) = \dfrac{1}{1-4x^2}$.
7. $f(x) = \dfrac{x}{(1+4x)^2}$.
8. $f(x) = \dfrac{x^3}{2-x^3}$.
9. $f(x) = \dfrac{x^2}{1-x^4}$.
10. $f(x) = \arctan(x)$.
11. $f(x) = \displaystyle\int_0^x \ln(1-y)dy$.
12. $f(x) = \displaystyle\int_0^x \arctan(z)\,dz$.

3.4.2. Series de potencias de las funciones exponencial, seno y coseno.

Vamos a mostrar que las funciones **exponencial, seno y coseno** se pueden representar como serie de potencias alrededor de cualquier número $a \in \mathbb{R}$.

Función exponencial. La primera observación es que la función exponencial $f(x) = e^x$ satisface la ecuación diferencial $f'(x) = f(x)$ y además $f(0) = 1$. Supongamos que f tiene un desarrollo en serie de potencias alrededor de $x = 0$. Es decir, supongamos que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

y calculemos los coeficientes a_n. De la discusión anterior,

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

y

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \cdots + n a_n x^{n-1} + (n+1)a_{n+1} x^n + \cdots .$$

Utilizando que $f' = f$ igualamos los coeficientes correspondientes a la potencias x^k. Es decir,

$$a_0 = a_1, \quad a_1 = 2a_2, \quad a_2 = 3a_3, \quad a_3 = 4a_4, \quad \cdots, \quad a_k = (k+1)a_{k+1}.$$

Por lo tanto,

$$a_0 = a_1,\ a_2 = \frac{a_0}{2} = \frac{a_0}{2!},\ a_3 = \frac{a_2}{3} = \frac{a_0}{2 \cdot 3} = \frac{a_0}{3!},\ a_4 = \frac{a_3}{4} = \frac{a_0}{2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{a_0}{4!},\ \cdots,\ a_n = \frac{a_0}{n!}.$$

Dado que $f(0) = 1 = a_0$, entonces $a_n = \dfrac{1}{n!}$. Más aún,

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Dado que la fórmula anterior es válida para cada $x \in \mathbb{R}$, entonces x se puede sustituir por cualquier valor real con el fin de obtener series asociadas con otras funciones, como por ejemplo $k(x) = e^{-x}$, $h(x) = x^2 e^{\sqrt{2x}}$, entre otras.

$$\begin{aligned}
e^{-x} &= 1 + \frac{(-x)}{1!} + \frac{(-x)^2}{2!} + \frac{(-x)^3}{3!} + \frac{(-x)^4}{4!} + \cdots + \frac{(-x)^n}{n!} + \cdots \\
&= 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^n}{n!} + \cdots \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}, \qquad x \in \mathbb{R}. \\
x^2 e^{\sqrt{x}} &= x^2 \left(1 + \frac{\sqrt{x}}{1!} + \frac{(\sqrt{x})^2}{2!} + \frac{(\sqrt{x})^3}{3!} + \frac{(\sqrt{x})^4}{4!} + \cdots + \frac{(\sqrt{x})^n}{n!} + \cdots\right) \\
&= x^2 + \frac{x^{5/2}}{1!} + \frac{x^3}{2!} + \frac{x^{7/2}}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{(n+2)/2}}{n!} + \cdots \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{(n+2)/2}}{n!}, \qquad x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Función coseno. Observemos que la función $g(x) = \cos(x)$ satisface la ecuación diferencial $g''(x) = -g(x)$ y además $g(0) = 1$ y $g'(0) = 0$. Supongamos que g tiene un desarrollo en serie de potencias alrededor de $x = 0$. Es decir, supongamos que

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Ahora vamos a calcular los coeficientes a_n. De la discusión anterior,

$$\begin{aligned}
g(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \cdots + a_n x^n + \cdots, \\
g'(x) &= a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \cdots + n a_n x^{n-1} + (n+1) a_{n+1} x^n + \cdots
\end{aligned}$$

y

$$g''(x) = 2a_2 + 3 \cdot 2a_3 x + 4 \cdot 3a_4 x^3 + \cdots + n(n-1) a_n x^{n-2} + (n+1) n a_{n+1} x^{n-1} + \cdots.$$

Dado que $g(0) = 1$ y $g'(0) = 0$, concluimos que $a_0 = 1$ y $a_1 = 0$. Puesto que $g'' = -g$ podemos igualar los coeficientes correspondientes a las potencias x^k, encontrando que

$$a_0 = -2a_2, \quad a_1 = -3 \cdot 2a_3, \quad a_2 = -4 \cdot 3a_4, \quad a_3 = -5 \cdot 4a_5, \quad a_4 = -6 \cdot 5a_6, \quad \cdots.$$

De esta secuencia se concluye que,

$$a_k = -(k+2)(k+1) a_{k+2}.$$

Dado que $a_1 = 0$, entonces todos los coeficientes impares deben ser cero. Esto es,

$$a_1 = a_3 = a_5 = a_7 = \cdots = a_{2k+1} = 0.$$

Puesto que $a_0 = 1$ entonces se puede ver que

$$a_0 = 1,\ a_2 = -\frac{a_0}{2} = -\frac{1}{2!},\ a_4 = -\frac{a_2}{4{\cdot}3} = \frac{1}{4!},\ a_6 = -\frac{a_4}{6{\cdot}5} = -\frac{1}{6!}.$$

Por lo tanto, $a_{2k} = \dfrac{(-1)^k}{(2k)!}$. Como consecuencia de lo anterior

$$\begin{aligned}\cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, \qquad x \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Función seno. Observemos que la función $h(x) = \operatorname{sen}(x)$ satisface la ecuación diferencial $h''(x) = -h(x)$ y además $h(0) = 0$, $h'(0) = 1$. Supongamos que h tiene un desarrollo en serie de potencias alrededor de $x = 0$. Es decir, supongamos que

$$h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Puesto que las funciones $g(x) = \cos(x)$ y $h(x) = \operatorname{sen}(x)$ satisfacen la misma ecuación diferencial, entonces los coeficientes satisfacen las mismas relaciones

$$a_0 = -2a_2, \quad a_1 = -3 \cdot 2a_3, \quad a_2 = -4 \cdot 3a_4, \quad a_3 = -5 \cdot 4a_5, \quad a_4 = -6 \cdot 5a_6,$$

concluimos que

$$a_k = -(k+2)(k+1)a_{k+2}.$$

Dado que $h(0) = a_0 = 0$ y $h'(0) = a_1 = 1$, entonces todos los coeficientes pares deben ser cero. Esto es,

$$a_0 = a_2 = a_4 = a_6 = \cdots = a_{2k} = 0.$$

Puesto que $a_1 = 1$ entonces se puede ver como en el caso de la función $g(x) = \cos(x)$ que

$$a_1 = 1, \quad a_3 = -\frac{1}{3!}, \quad a_5 = \frac{1}{5!}, \quad a_7 = -\frac{1}{7!}, \quad \cdots, \quad a_{2k+1} = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}.$$

Como consecuencia de lo anterior

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \qquad x \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Ejemplo 3.52. Utilizar series de potencias para **resolver la ecuación diferencial**

$$f''(x) + 4f(x) = 4\cos(2x), \quad \text{sujeta a las condiciones} \quad f(0) = 0 \;\text{ y }\; f'(0) = 0.$$

Supongamos que f tiene la forma de una serie de potencias alrededor de $x = 0$. Es decir,

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \cdots .$$

Primero observemos que $f(0) = 0 = a_0$. Ahora diferenciando dos veces f, obtenemos que

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \cdots$$

y

$$f(x) = 2a_2 + 3\cdot 2a_3x + 4\cdot 3a_4x^2 + 5\cdot 4x^3 + \cdots .$$

Por lo tanto, $f'(0) = 0 = a_1$. Además,

$$\begin{aligned} f''(x)+4f(x) = 2a_2+3\cdot 2a_3x+(4\cdot 3a_4+4a_2)x^2+(5\cdot 4a_5+4a_3)x^3+(6\cdot 5a_6+4a_4)x^4 \\ + (7\cdot 6a_7 + 4a_5)x^5 + \cdots + (n\cdot(n-1)a_n + 4a_{n-2})x^{n-2} + \cdots . \end{aligned}$$

De otro lado,

$$\begin{aligned} 4\cos(2x) &= 4\sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^n(2x)^{2n}}{(2n)!} \\ &= 4 - \frac{4\cdot 2^2}{2!}x^2 + \frac{4\cdot 2^4}{4!}x^4 - \frac{4\cdot 2^6}{6!}x^6 + \frac{4\cdot 2^8}{8!}x^8 - \frac{4\cdot 2^{10}}{10!}x^{10} + \cdots . \end{aligned}$$

Puesto que $f''(x) + 4f(x) = 4\cos(2x)$, vamos a igualar las dos series para calcular los coeficientes de la serie asociada con f. En primer lugar, $a_3 = 0$. Más aún, los coeficientes impares deben ser cero. Es decir,

$$a_3 = a_5 = a_7 = \cdots = a_{2n+1} = 0 \quad (\textbf{¡verificarlo!}).$$

Ahora, se puede ver directamente que $2a_2 = 4 \iff a_2 = 2$. De otro lado,

$$\begin{aligned} 4\cdot 3a_4 + 4a_2 = \frac{4\cdot 2^2}{2!} \quad &\iff \quad a_4 = -\frac{8}{3!} = -\frac{2^3}{3!}, \\ 6\cdot 5a_6 + 4a_4 = \frac{4\cdot 2^4}{4!} \quad &\iff \quad a_6 = \frac{32}{5!} = \frac{2^5}{5!}, \\ 8\cdot 7a_8 + 4a_6 = -\frac{4\cdot 2^6}{6!} \quad &\iff \quad a_8 = -\frac{128}{7!} = -\frac{2^7}{7!}. \end{aligned}$$

En general, $a_{2n} = (-1)^{n+1}\dfrac{2^{2n-1}}{(2n-1)!}$. Así que

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^2 - \frac{2^3}{3!}x^4 + \frac{2^5}{5!}x^6 - \frac{2^7}{7!}x^8 + \frac{2^9}{9!}x^{10} + \cdots \\ &= x\left(2x - \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^5}{5!} - \frac{(2x)^7}{7!} + \frac{(2x)^9}{9!} + \cdots\right) = x\operatorname{sen}(2x). \end{aligned}$$

Se puede verificar directamente que $f(x) = x\operatorname{sen}(2x)$ satisface la ecuación diferencial $f''(x) + 4f(x) = 4\cos(2x)$ y las condiciones $f(0) = f'(0) = 0$.

Ejercicios

Utilice series de potencias alrededor de cero para resolver las siguientes ecuaciones diferenciales.

1. $g'(x) - 2g(x) = e^{2x}$. **Rta:** $g(x) = xe^{2x}$ con $g(0) = 0$.

2. $h''(x) - 9h(x) = 2e^{3x} + 12xe^{3x}$. **Rta:** $h(x) = x^2e^{3x}$ con $h(0) = h'(0) = 0$.

3. $k''(x) + 4k(x) = -4\operatorname{sen}(2x)$. **Rta:** $k(x) = x\cos(2x)$ con $k(0) = 0,\ k'(0) = 1$.

4. $l''(x) + 9l(x) = 12x\cos(3x) + 2\operatorname{sen}(3x)$. **Rta:** $l(x) = x^2\cos(3x)$ con $l(0) = l'(0) = 0$.

5. $f''(x) - 4x^2f(x) = 2e^{x^2}$. **Rta:** $f(x) = e^{x^2}$ con $f(0) = 1,\ f'(0) = 0$.

3.4.3. Teorema de Taylor - Aproximación vía series de potencias. Como hemos visto en las secciones anteriores, algunas funciones se pueden desarrollar o representar mediante una serie de potencias en el intervalo de convergencia $I = (a - R, a + R)$ cuando $0 < R < \infty$. Es decir, para cada $x \in I$ se tiene que

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n \\ &= a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + a_3(x-a)^3 + \cdots + a_k(x-a)^k + \cdots . \end{aligned}$$

También aprendimos que los coeficientes a_n viene dados por $a_n = \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$. Esto es,

$$\begin{aligned} f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 \\ + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \cdots . \end{aligned}$$

Consideremos el polinomio $P_{k,a}$ de grado k dado por

$$P_{k,a}(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

Este polinomio se denomina polinomio de Taylor de grado k asociado con la función f. Se puede observar directamente que f y $P_{k,a}$ tienen las siguientes propiedades

$$f(a) = P_{k,a}(a),\ f'(a) = P'_{k,a}(a),\ f''(a) = P''_{k,a}(a),\ f'''(a) = P'''_{k,a}(a),\ \cdots .$$

En otras palabras $f^{(k)}(a) = P^{(k)}_{k,a}(a)$ para $k \geq 0$.

Interpretación geométrica. Notemos que $P_{1,a}(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$ es la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $Q(a, f(a))$. Como vieron en el curso de Cálculo I, $P_{1,a}$ es la mejor aproximación lineal (orden 1) de f en el punto $Q(a, f(a))$.

Se puede ver que

$$P_{2,a}(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2$$

corresponde a la mejor aproximación cuadrática en el punto $Q(a, f(a))$.

En general, $P_{k,a}$ corresponde a la mejor aproximación de f por un polinomio de orden k en el punto $Q(a, f(a))$.

En un curso de Cálculo Avanzado o Análisis Matemático se puede establecer el siguiente resultado.

TEOREMA 3.53 (**Teorema de Taylor con resto**). *Supongamos que la función f se puede representar mediante la serie de potencias*

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \\ &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \cdots \end{aligned}$$

en el intervalo de convergencia $I = (a - R, a + R)$. Entonces para $k \in \mathbb{N}$ dado, $P_{k,a}$ es el único polinomio de orden k que satisface las $k+1$ condiciones

$$f(a) = P_{k,a}(a),\ f'(a) = P'_{k,a}(a),\ f''(a) = P''_{k,a}(a),\ \cdots,\ f^{(k)}(a) = P^{(k)}_{k,a}(a).$$

Más aún, si $R_{k,a}(x) = f(x) - P_{k,a}(x)$ con $x \in I$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} [f(x) - P_{k,a}(x)] = \lim_{n\to\infty} R_{k,a}(x) = 0,$$

para todo $x \in [a - r, a + s] \subset I$ con $r, s < R$. La función $R_{k,a}$ se denomina k-resto de Taylor.

Observación 3.54 (**Aproximación vía el Teorema de Taylor con resto**). El Teorema de Taylor con resto realmente establece que una función f representada por su serie de Taylor puede ser aproximada alrededor de $x = a$ por su polinomio de Taylor $P_{k,a}$ de orden k, pues el resto de Taylor $R_{k,a}$ tiende a cero uniformemente en cualquier subintervalo cerrado de $(a - R, a + R)$. Este hecho puede ser utilizado para estimar integrales definidas, pues es mucho más sencillo realizar cálculos para un polinomio, que para una función arbitraria. Lo anterior lo vamos a ilustrar con algunos ejemplos y ejercicios.

Ejemplos 3.55. **1.-** Estimar la integral definida $\displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$. La primera observación es que el Teorema Fundamental del Cálculo garantiza que la función $f(x) = e^{-x^2}$ tiene una antiderivada en $[0, 1]$, pero se puede mostrar que ésta no tiene una fórmula cerrada simple. En realidad, la antiderivada viene definida por

$$F(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt.$$

Para estimar esta integral podemos aproximar f hasta un cierto orden por el polinomio de Taylor. Para ello,

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + R_{6,0}(x) = P_{6,0}(x) + R_{6,0}(x).$$

Entonces podemos estimar la integral como

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx \approx \int_0^1 P_{6,0}(x)\,dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!}\right) dx$$

$$= \left[x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} - \frac{x^7}{42}\right]_0^1 = \frac{26}{35}.$$

Como ejercicio efectuar aproximaciones de orden 8 y 10.

2.- Estimar la integral $\int_0^4 x\,\mathrm{sen}(\sqrt{x})\,dx$. Recordemos que

$$\mathrm{sen}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots .$$

Entonces para $x \geq 0$,

$$x\,\mathrm{sen}(\sqrt{x}) = x\left(x^{1/2} - \frac{x^{3/2}}{3!} + \frac{x^{5/2}}{5!} - \cdots\right) \approx x^{3/2} - \frac{x^{5/2}}{6} + \frac{x^{7/2}}{120}.$$

Por lo tanto, podemos aproximar la integral mediante,

$$\int_0^4 x\,\mathrm{sen}(\sqrt{x})\,dx \approx \int_0^4 \left(x^{3/2} - \frac{x^{5/2}}{6} + \frac{x^{7/2}}{120}\right) dx$$

$$\approx \left[\frac{2x^{5/2}}{5} - \frac{x^{7/2}}{21} + \frac{x^{9/2}}{540}\right]_0^4$$

$$\approx \frac{64}{5} - \frac{128}{21} + \frac{128}{135} = \frac{7232}{945}.$$

Ejercicios

Utilice series de Taylor para obtener una aproximación de la integral definida tomando los tres primeros términos de la serie asociada con el integrando.

1. $\int_0^1 t^2 \cos(\sqrt{2t})\,dt$.
2. $\int_0^1 (z+1)e^{-z^2}\,dz$.
3. $\int_0^1 \sqrt{t}\,\mathrm{sen}(\sqrt{t})\,dt$.
4. $\int_0^{1/4} w \ln(1+\sqrt{2w})\,dw$.

3.5. Evaluación del Tercer Capítulo

1. *a*) Determine la convergencia o divergencia de la integral impropia

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt[3]{e^{-x}+1}}\,dx.$$

b) Evalúe el siguiente límite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^3}\int_0^x \mathrm{sen}^3(t)\,dt.$$

c) Evalúe el siguiente límite

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} [1+\cos(x)]^{\tan(x)}.$$

2. Determine la convergencia o divergencia de las series dadas, justificando sus respuestas

$a)$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2\ln(n)+n}{(\ln(n))^2+1}$. $b)$ $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2^n-3^n}{4^n}$. $c)$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{n}{2n^2+1}$.

3. Determine la convergencia o divergencia de la serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2(\ln(n))^2}{3n^5+1}.$$

4. Utilice el criterio de la integral para determinar la convergencia o divergencia de la serie
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln(n)}}.$$

5. Determine el radio de convergencia, el intervalo de convergencia absoluta y analice la convergencia en los extremos del intervalo de convergencia para la serie de potencias
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}(x+2)^n}{n^2 5^n}.$$

6. **Responda uno y sólo uno de los siguientes enunciados**.
   $a)$ Encuentre la serie de potencias alrededor de $x=0$ de la función
$$f(x) = \ln(1+x^2), \qquad |x|<1.$$
   $b)$ Resuelva la ecuación diferencial utilizando series de potencia alrededor de $x=0$
$$f'(x)+2f(x)=0, \quad \text{sujeta a que} \quad f(0)=1.$$
   $c)$ Encuentre una aproximación de la integral definida
$$\int_0^1 x^3 e^{-x^2}\,dx,$$
   sumando los tres primeros términos de la serie asociada alrededor de $x=0$.